Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

AP1 - CÁLCULO II - 2012/1 Gabarito

Solução da 1ª Questão

(a)

$$F'(x) = x^3 . \frac{d}{dx}\left[\int_1^x \operatorname{arctg}(t^2)\, dt\right] + 3x^2 . \int_1^x \operatorname{arctg}\ (t^2)\, dt$$

Seja $G(x) = \int_1^x \operatorname{arctg}\ \left(t^2\right) dt$. Observe que o integrando $f(t) = \operatorname{arctg}\ t^2$ é uma função contínua para todo t número real . Assim pela 1ª forma do TFC temos que $\frac{d}{dx}G(x) = \operatorname{arctg}\ (x^2)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo

$$F'(x) = x^3 . \operatorname{arctg}(x^2) + 3x^2 . \int_1^x \operatorname{arctg}\ (t^2)\, dt$$

Portanto

$$F'(1) = \operatorname{arctg}(1) + 3 . \underbrace{\int_1^1 \operatorname{arctg}\ (t^2)\, dt}_{0} = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

(b) Dos seus conhecimentos de segundo grau você sabe que $y = x^2 - 1$ é a equação de uma parábola de vértice em $(0,-1)$ e raízes em $x = -1$ e $x = 1$. Por outro lado dos seus conhecimentos de pré calculo ou do apêndice 1 do caderno da coordenação sabemos que o gráfico de $y = |x^2 - 1|$ é obtido refletindo os pontos do gráfico de $y = x^2 - 1$ que tem ordenada negativa em torno do eixo x , como mostra a Figura 2.2 no intervalo [-1,2]

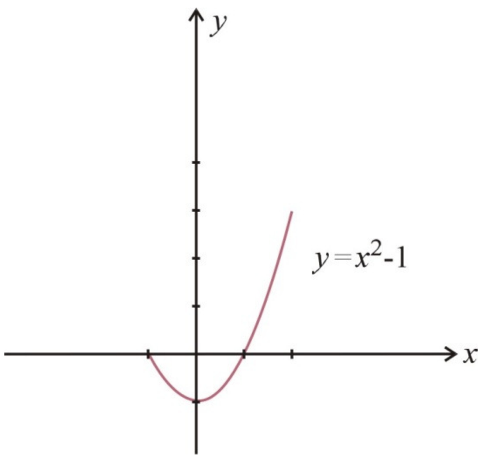

Figura 2.1

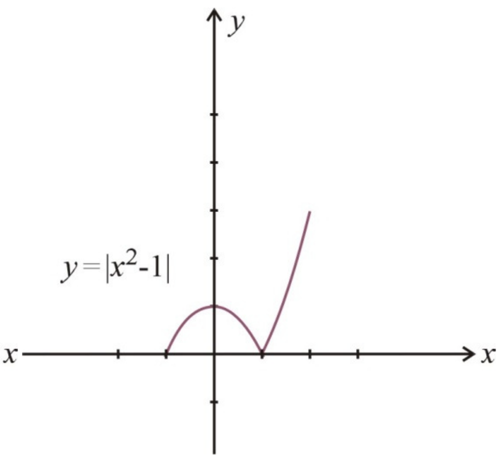

Figura 2.2

Logo utilizando as propriedades da integral definida podemos dizer que

$$\int_{-1}^{2} |x^2-1|\,dx = \int_{-1}^{1} |x^2-1|\,dx + \int_{1}^{2} |x^2-1|\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)dx + \int_{1}^{2} (x^2-1)\,dx$$

$$= x - \frac{x^3}{3}\bigg]_{-1}^{1} + \frac{x^3}{3} - x\bigg]_{1}^{2} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

Solução da 2ª Questão

(a) Faça a substituição $u=(1-t^4) \Rightarrow du=-4t^3\,dt \Rightarrow t^3\,dt = -\dfrac{du}{4}$. Logo

$$\int t^3(1-t^4)^7\,dt = -\frac{1}{4}\int u^7 du = -\frac{1}{4}\left[\frac{u^8}{8}\right] + C = -\frac{1}{32}(1-t^4)^8 + C.$$

(b) $$\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln x\Big]_1^e - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = 1 - \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx \qquad (1)$$

Faça $u=\ln x \Rightarrow du = \dfrac{1}{x}dx.$ Mudando os limites de integração temos que:

se $x=1 \Rightarrow u=\ln 1 = 0$ e se $x=e \Rightarrow u=\ln e = 1.$ Logo

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_0^1 u\,du = \frac{u^2}{2}\bigg]_0^1 = \frac{1}{2} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta $\displaystyle\int_1^e \frac{1-\ln x}{x}\,dx = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$

Solução da 3ª Questão

(a) Faça

$u=x \Rightarrow du=dx, \quad dv=\sec^2 x\,dx \Rightarrow v=\operatorname{tg} x$

Assim,

$$\int x\sec^2 x\,dx = x\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,dx \qquad (1)$$

Por outro lado $$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\int \frac{\overbrace{-\operatorname{sen} x\,dx}^{du}}{\underbrace{\cos x}_{u}} = -\ln|\cos x| + C \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta

$$\int x\sec^2 x\,dx = x\operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C$$

(b) $\int (\text{sen } t)^{\frac{1}{2}} \cos^3 t \ dt = \int (\text{sen } t)^{\frac{1}{2}} \cos^2 t . \cos t \, dt = \int (\text{sen } t)^{\frac{1}{2}} (1 - \text{sen}^2 t) . \cos t \, dt$

Faça a substituição $u = \text{sen}\, t \Rightarrow \quad du = \cos t \, dt,$ logo

$$\int (\text{sen } t)^{\frac{1}{2}} (1 - \text{sen}^2 t) . \cos t \, dt = \int u^{\frac{1}{2}} (1 - u^2) \, du = \int (u^{\frac{1}{2}} - u^{\frac{5}{2}}) \, du = \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} + C$$

$$= \frac{2\text{sen}^{\frac{3}{2}} t}{3} - \frac{2\text{sen}^{\frac{7}{2}} t}{7} + C .$$

Solução da 4ª Questão

a) Nesta forma a região R precisa ser dividida em duas sub-regiões como mostra a Figura 4.2. Mostramos também nela um retângulo representativo vertical em cada sub-região.

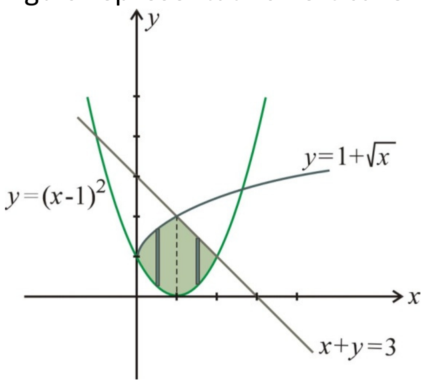

Figura 4.2

Neste caso a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável x:

$$A\,(R) = \int_0^1 ((1+\sqrt{x}) - (x-1)^2)\, dx + \int_1^2 ((3-x) - (x-1)^2)\, dx$$

Ou em forma equivalente

$$A\,(R) = \int_0^1 (1+\sqrt{x})\, dx + \int_1^2 (3-x)\, dx - \int_0^2 (x-1)^2\, dx$$

b) Nesta forma a região R também precisa ser dividida em duas sub-regiões como é visto na Figura 4.3. Nela mostramos também um retângulo representativo horizontal em cada sub-região.

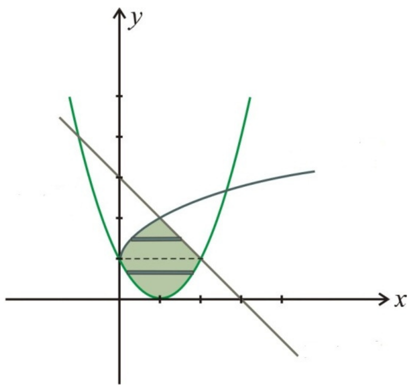

Figura 4.3

Neste caso a representação da área é feita também por duas integrais em relação à variável y:

$$A\ (R\ )=\int_0^1((1+\sqrt{y})-(1-\sqrt{y}))\,dy+\int_1^2((3-y)-(y-1)^2)\,dy$$

$$=\int_0^1 2\sqrt{y}\,dy+\int_1^2(2+y-y^2)\,dy$$

c)

Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável x, então

$$A\ (R\ )=\int_0^1(1+\sqrt{x})\,dx+\int_1^2(3-x)\,dx-\int_0^2(x-1)^2\,dx$$

$$A\ (R\ )=x+\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg]_0^1+3x-\frac{x^2}{2}\Bigg]_1^2-\frac{(x-1)^3}{3}\Bigg]_0^2=1+\frac{2}{3}+4-3+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$$ unidades de área.

Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável y, então

$$A\ (R\ )=4\frac{y^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg]_0^1+\left[2y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right]\Bigg]_1^2=\frac{4}{3}+\ (4+2-\frac{8}{3})-\ (2+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$ unidades de

área.