AD2 - Geometria Analítica II - 1/2011

Questão 1: Sejam a reta $r : \{(3+t, 2+t, -1+t) |\ t \in \mathbb{R}\}$ e o plano $\Pi : 6x - y + 2z = 4$.

(a) Determine a posição relativa de r e Π.

(b) Encontre a equação do plano Γ que contém a reta r e é ortogonal ao plano Π.

(c) Qual é a posição relativa entre a reta $\Gamma \cap \Pi$ e a projeção ortogonal da reta r em Π? Justifique.

(Se não quiser, você não precisa fazer contas pra justificar este item, use apenas as palavras e/ou um desenho esquemático).

SOLUÇÃO:

(a) As equações paramétricas de r podem ser escritas como $r : (3, 2, -1) + t(1, 1, 1)$. Logo o vetor direção de r é $v = (1, 1, 1)$.
O vetor normal ao plano Π é $n = (6, -1, 2)$. Então, para determinar a posição relativa entre r e Π, basta calcular o produto interno

$$\langle n, v\rangle = \langle (6, -1, 2), (1, 1, 1)\rangle = 7 \neq 0$$

Logo $r \cap \Pi \neq \emptyset$ e r não está contida em Π, ou seja, a reta intersecta o plano em um único ponto.

(b) Chamemos de $\overrightarrow{\eta}$ o vetor normal do plano Γ que queremos encontrar. Como $r \subset \Gamma$, devemos ter $\overrightarrow{\eta} \perp \overrightarrow{v}$ e como Γ e Π devem ser perpendiculares, também temos $\overrightarrow{\eta} \perp \overrightarrow{n}$. Portanto, podemos concluir que uma possibilidade de calcularmos $\overrightarrow{\eta}$ é

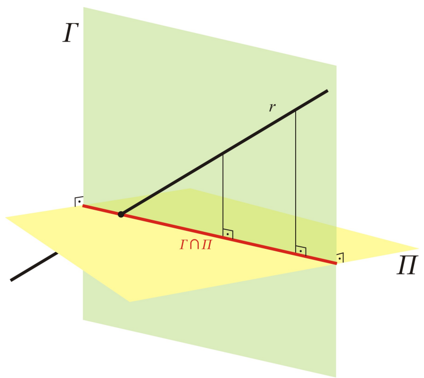
$$\overrightarrow{\eta} = \overrightarrow{n} \times \overrightarrow{v} = (6, -1, 2) \times (1, 1, 1) = (-3, -4, 7)$$

Então, a equação do plano Γ é $-3x - 4y + 7z = d$. Para encontrar d, basta escolhermos um ponto do plano: como $r \subset \Gamma$, tomamos

$t = 0$ na reta r e obtemos o ponto $(3, 2, -1)$ que deve estar em Γ. Daí, substituindo chegamos à equação

$$\Gamma : -3x - 4y + 7z = -24$$

(c) São COINCIDENTES.



Se baixarmos perpendiculares a Π a partir de pontos de r, elas necessariamente deverão pertencer ao plano Γ. Logo a projeção ortogonal de r em Π tem que coincidir com reta intereseção entre Γ e Π.

Questão 2: Sejam Π um plano e $P \notin \Pi$. Baixando uma perpendicular de P até Π encontramos o ponto $Q \in \Pi$. Definimos o ***simétrico*** de P em relação ao plano Π como sendo o único ponto P' que satisfaz

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$$

Que estratégia você usaria para encontrar o ponto P'? Descreva-a e em seguida aplique-a para encontrar o simétrico da origem em relação ao plano $2x - 2y + z = 3$.

SOLUÇÃO:

Suponha que o plano tenha vetor normal $\overrightarrow{n}$.

1ª ESTRATÉGIA:

- Encontrar a equação da reta perpendicular ao plano e que passa por P:

$$r : \ P + t.\overrightarrow{n}$$

- Encontrar o ponto Q, intereseção de r com Π, substituindo as equações paramétricas de r na equação cartesiana de Π.

- Resolver a equação $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$, ou equivalentemente $P' = 2Q - P$.

aplicando ao exemplo...

O vetor normal ao plano $2x - 2y + z = 3$ é $\overrightarrow{n} = (2, -2, 1)$

- $r : (0, 0, 0) + t(2, -2, 1) = (2t, -2t, t)$
- $Q = r \cap \Pi$

$$2.(2t) - 2.(-2t) + 1.(t) = 3 \Longrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Logo $Q = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

- $P' = 2Q - P$

$$P' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

2ª ESTRATÉGIA:

- Resolver o sistema:

$$\begin{cases} PP' \parallel \overrightarrow{n} \\ d(P, \Pi) = d(P', \Pi) \end{cases}$$

aplicando ao exemplo...

Se chamamos $P' = (x, y, z)$, temos $PP' \parallel \overrightarrow{n} \Longrightarrow x = 2k,\ y = -2k,\ z = k$, para algum valor de $k \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} d(P, \Pi) &= d(P', \Pi) \\ \frac{|2.0 - 2.0 + 1.0 - 3|}{3} &= \frac{|2.x - 2.y + 1.z - 3|}{3} \\ 1 &= \frac{|2.(2k) - 2.(-2k) + 1.k - 3|}{3} \\ |9k - 3| &= 3 \end{aligned}$$

Donde concluimos que $k = \frac{2}{3}$ ou $k = 0$.
Se $k = 0$ estamos em P, portanto

$$P' = \left(\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Questão 3: Que equação devem satisfazer os pontos $P = (x, y, z)$ que distam 2 da reta $m : (1 + t, 2t, 1)$?

SOLUÇÃO:

$$m : (1, 0, 1) + t(1, 2, 0)$$

Chamemos $Q = (1, 0, 1)$ e $\overrightarrow{v} = (1, 2, 0)$. Se $P = (x, y, z)$ então,

$$d(P, m) = \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{v}\right\|}{\|\overrightarrow{v}\|}$$

Vamos calcular separadamente cada um dos termos:

$$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ 1-x & -y & 1-z \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (2z - 2, 1 - z, y - 2x + 2)$$

$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{v}\right\| &= \sqrt{(2z-2)^2 + (1-z)^2 + (y-2x+2)^2} \\ &= \sqrt{5(1-z)^2 + (y-2x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\|v\| = \sqrt{5}$$

Assim

$$\begin{aligned} d(P, m) &= 2 \\ d(P, m)^2 &= 4 \\ \frac{\left\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{v}\right\|^2}{\|\overrightarrow{v}\|^2} &= 4 \\ \frac{5(1-z)^2 + (y-2x+2)^2}{5} &= 4 \\ 5(1-z)^2 + (y-2x+2)^2 &= 20 \end{aligned}$$

Questão 4: Determine a equação cartesiana da superfície cilíndrica S, sabendo que a equação da diretriz γ e a direção $\overrightarrow{v}$ das geratrizes são dadas por:

$$\gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{v} = (1, 1, 1)$$

SOLUÇÃO: Sabemos que um ponto $P = (x, y, z) \in S$ se, e só se, existe um único ponto $P' = (x', y', z') \in \gamma$ e um único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{PP'} = t\,\vec{v}$, isto é,

$$(I): \begin{cases} x - x' = t \\ y - y' = t \\ z - z' = t \end{cases} \qquad (II): \begin{cases} x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1 \\ x' + y' = 1 \end{cases}$$

Então, somando as duas primeiras igualdades de (I), obtemos

$$x + y = x' + t + y' + t = x' + y' + 2t \underbrace{=}_{x'+y'=1} 1 + 2t$$

$$\Longrightarrow$$

$$t = \frac{x + y - 1}{2} \tag{1}$$

Assim, de (I) e (1), temos:

$$x' = x - t = x - \frac{x + y - 1}{2} = \frac{x - y + 1}{2}$$

$$y' = y - t = y - \frac{x + y - 1}{2} = \frac{y - x + 1}{2}$$

$$z' = z - t = z - \frac{x + y - 1}{2} = \frac{2z - y - x + 1}{2}$$

Logo, substituindo x', y' e z' na equação $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$, obtemos

$$\frac{(x - y + 1)^2}{4} + \frac{(y - x + 1)^2}{4} + \frac{(2z - y - x + 1)^2}{4} = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4xy + 2 + x^2 + y^2 + 2xy + 4z^2 + 4z + 1 - 2(x + y)(2z + 1) = 4$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$3x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 2x - 2y + 4z - 1 = 0,$$

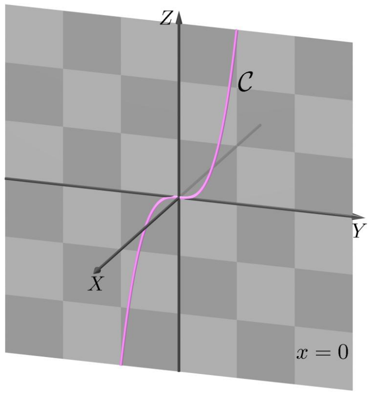
que é a equação da superfície S.

Questão 5: Determine a equação cartesiana e faça um esboço da superfície de revolução S obtida girando a curva:

$$C \begin{cases} z = 3y^3 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{em torno do eixo } OZ$$

SOLUÇÃO: A curva C está contida no plano YZ e é dada pela equação

$f(y,z)=0$, onde $f(y,z)=z-3y^3$. Veja a figura:



Como a rotação é realizada em torno do eixo OZ, devemos manter a variável z e substituir a variável y, na equação $f(y,z)=0$, pela expressão $\pm\sqrt{x^2+y^2}$ para obtermos a equação cartesiana de S:

$$f\left(\pm\sqrt{x^2+y^2},z\right)=0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z-3\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}\right)^3=0$$

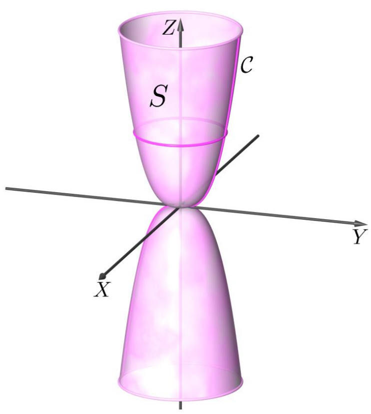
$$\Longleftrightarrow$$

$$z=\pm3\left(x^2+y^2\right)^{3/2}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$z^2=9(x^2+y^2)^3$$

O gráfico de S é:



Questão 6: Mostre que a interseção do plano $\pi : 4x - 5y - 10z = 20$ com o hiperbolóide de uma folha

$$S : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

consiste de duas retas.

SOLUÇÃO: Temos que:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{4} = 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$16x^2 - 100z^2 = 25(16 - y^2)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(4x - 10z)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y) \quad (*)$$

Logo $(x, y, z) \in S \cap \pi$ se, e só se, $4x - 10z = 20 + 5y$ (segue da equação de π) que substituído em $(*)$ resulta em:

$$(20 + 5y)(4x + 10z) = 25(4 - y)(4 + y)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$(4 + y)(4x + 10z) = 5(4 - y)(4 + y) \quad (**)$$

Analisando a igualdade $(**)$, temos os casos:

Caso 1: Se $(x, y, z) \in \pi \cap S$ e $y \neq -4$, podemos dividir $(**)$ por $(4 + y)$ e então temos

$$4x + 10z = 20 - 5y,$$

isto é, (x, y, z) também pertence ao plano $\pi' : 4x + 5y + 10z = 20$. Logo (x, y, z) está na reta $l \subset \pi \cap S$ que é a interseção dos planos π com π':

$$l : \begin{cases} 4x - 5y - 10z = 20 \\ 4x + 5y + 10z = 20 \end{cases}$$

Caso 2: Se $(x, y, z) \in \pi \cap S$ e $y = -4$, temos que (x, y, z) está na reta $l' \subset \pi \cap S$ que é a interseção do plano π com o plano $y = 4$.

Dos casos acima, concluímos que $\pi \cap S = l \cup l'$ consiste de duas retas.