

Gabarito da AP3 de Cálculo III

Questão 1 (2pts): Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^4y^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(a) Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

(b) Determine os pontos de continuidade de f

(c) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$

Solução:

(a) Temos que $f(x, y) = \frac{2x^4y^2}{x^2 + y^2} = \underbrace{2x^2y^2}_{f(x,y)} \cdot \underbrace{\frac{x^2}{x^2 + y^2}}_{g(x,y)}$

Como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x^2y = 0$ e $|g(x, y)| = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$, isto é, g é limitada.

Temos (do Teorema 3.2 pág.36 módulo 1) que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^4y^2}{x^2 + y^2} = 0$

(b) Para $(x, y) \neq (0, 0)$, f é contínua por ser quociente de dois polinômios.

Também, pelo item (a) como $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$ logo f é contínua em $(0, 0)$. Assim, f é contínua em $\mathbb{R}^2$.

(c) Para $(x, y) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \left(\frac{2x^4y^2}{x^2 + y^2} \right)_x = \frac{(2x^4y^2)_x(x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)_x(2x^4y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{8x^3y^2(x^2 + y^2) - 2x(2x^4y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{4x^5y^2 + 8x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \left(\frac{2x^4 y^2}{x^2 + y^2} \right)_y = \frac{(2x^4 y^2)_y (x^2 + y^2) - (x^2 + y^2)_y (2x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{4x^4 y (x^2 + y^2) - 2y (2x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{4x^6 y}{(x^2 + y^2)^2}
\end{aligned}$$

Para $(x, y) = (0, 0)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^4 \cdot 0 - 0}{h} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 0 \cdot h^2 - 0}{h} = 0
\end{aligned}$$

Questão 2 (2pts): Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16}$

- (a) Determine o plano tangente a $f(x, y, z) = 1$ no ponto $(\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})$
- (b) Calcule a derivada direcional de f no ponto $(2, 3, 4)$ na direção de máximo crescimento.

Solução:

- (a) O plano tangente à superfície $f(x, y, z) = 1$ no ponto $(\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2})$ é dado por

$$\nabla f(\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}) \circ (x - \sqrt{2}, y - 0, z - 2\sqrt{2}) = 0$$

Como

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\
&= \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}, \frac{z}{8} \right)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla f(\sqrt{2}, 0, 2\sqrt{2}) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4} \right)$$

Assim, o plano tangente é:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \circ (x - \sqrt{2}, y, z - 2\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{4}z - 2 = 0$$

(b) A direção de máximo crescimento da derivada direcional no ponto $(2, 3, 4)$ é $\vec{u} = \nabla f(2, 3, 4)$.

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 3, 4) &= \nabla f(2, 3, 4) \circ \vec{u} = \nabla f(2, 3, 4) \circ \nabla f(2, 3, 4) \\ &= \|\nabla f(2, 3, 4)\|^2 \end{aligned}$$

Como $\nabla f(2, 3, 4) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{u}} &= \left\| \left(1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \right\|^2 = 1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{61}{36} \end{aligned}$$

Questão 3 (2pts): Usando Multiplicadores de Lagrange, ache os pontos de máximo e mínimo da função $f(x, y) = 3x + 2y$ sobre a elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

Solução:

Pelo Método de Multiplicadores de Lagrange, os pontos de máximo e de mínimo devem satisfazer

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 1 \end{cases}$$

onde $g(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$.

Assim, tem-se

$$\begin{cases} (3, 2) = \lambda \left(\frac{x}{2}, \frac{2y}{9}\right) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} 3 = \frac{\lambda x}{2} \Rightarrow x = \frac{6}{\lambda} \\ 2 = \frac{2\lambda y}{9} \Rightarrow y = \frac{9}{\lambda} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\frac{\left(\frac{6}{\lambda}\right)^2}{4} + \frac{\left(\frac{9}{\lambda}\right)^2}{9} = 1 \text{ de onde } \frac{9}{\lambda^2} + \frac{9}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \frac{18}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 3\sqrt{2}$$

Assim, se

$$\lambda = 3\sqrt{2}, \quad x = \frac{2}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \text{e se} \quad \lambda = -3\sqrt{2}, \quad x = -\frac{2}{\sqrt{2}}, \quad y = -\frac{3}{\sqrt{2}}$$

Logo, os pontos críticos são

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ e } \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$$

Também,

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) = \frac{12}{\sqrt{2}}, \quad f\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{12}{\sqrt{2}}$$

Assim,

$$\left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ é um ponto de máximo e } \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \text{ é um ponto de mínimo}$$

Questão 4 (2pts): Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x, y, z) = (z \cos x \sin y, z \sin x \sin y, z \cos y)$$

(a) Calcule a matriz Jacobiana $f'(x, y, z)$

(b) A função f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$?

(c) Calcule $d_{(0, \pi/2, 1)} f(x, y, z)$

Solução:

(a) Como $f(x, y, z) = \left(\underbrace{z \cos x \operatorname{sen} y}_{f_1(x, y, z)}, \underbrace{z \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}_{f_2(x, y, z)}, \underbrace{z \cos y}_{f_3(x, y, z)} \right)$ temos que a matriz Jacobiana de f é

$$f'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} & \frac{\partial f_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y & z \cos x \cos y & \cos x \operatorname{sen} y \\ z \cos x \operatorname{sen} y & z \operatorname{sen} x \cos y & \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \\ 0 & -z \operatorname{sen} y & \cos y \end{pmatrix}$$

(b) Como as derivadas parciais das funções componentes f_1, f_2, f_3 são funções contínuas em $\mathbb{R}^3$ por serem produto de funções contínuas logo (pelo Teorema 6 aula 22) $f = (f_1, f_2, f_3)$ é diferenciável em $\mathbb{R}^3$.

(c) Tem-se por definição

$$d_{(0, \pi/2, 1)} f(x, y, z) = f' \left(0, \frac{\pi}{2}, 1 \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ -y \end{pmatrix}$$

Questão 5 (2pts): Seja $f(x, y) = (y \cos x, y \operatorname{sen} x)$ e $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável tal que $g(1, -1) = \left(\frac{\pi}{4}, 1 \right)$, $g'(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calcule

(a) $(f \circ g)'(1, -1)$

(b) $(g \circ f)' \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$

Solução:

(a) Pela Regra da Cadeia, tem-se

$$(f \circ g)'(1, -1) = f'(g(1, -1)) \cdot g'(1, -1)$$

Como

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} -y \operatorname{sen} x & \cos x \\ y \cos x & \operatorname{sen} x \end{pmatrix}$$

Logo,

$$f'(g(1, -1)) = f'\left(\frac{\pi}{4}, 1\right) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Assim,

$$(f \circ g)'(1, -1) = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(b) De forma análoga ao item (a)

$$(g \circ f)' \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = g' \left(f \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \right) \cdot f' \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$$

Como $f \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = (1, -1)$ assim

$$g' \left(f \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \right) = g'(1, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Também,

$$f' \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto,

$$(g \circ f)' \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 & -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$