Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP1 – Álgebra Linear II – 2012/2
Gabarito

Questão 1 (1,5 pontos): Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ com polinômio característico $p(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda+1)^2$ e cujos autoespaços são

$$E(\lambda = 2) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x + y - z = 0 \text{ e } x + 2y + 3z = 0\} \text{ e}$$
$$E(\lambda = -1) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x - 2y = 0 \text{ e } x - 3z = 0\}.$$

a) [1,2 pts] Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor de A.

b) [0,3 pt] A é diagonalizável? Justifique a sua resposta.

Solução:

a) Segue do polinômio característico que a multiplicidade algébrica do autovalor 2 é 1 e a do autovalor -1 é 2.

Para determinar as multiplicidades geométricas devemos determinar uma base para cada um dos autoespaços.

- Autovalor 2: Devemos resolver o sistema linear $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0. \end{cases}$

Reduzindo por linhas a matriz associada ao sistema, obtemos:

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma em escada, onde fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ e em $\sim_2$: $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$.

Logo, $x - 5z = 0$ e $y + 4z = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} E(\lambda = 2) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x + y - z = 0 \text{ e } x + 2y + 3z = 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x - 5z = 0 \text{ e } y + 4z = 0\} \\ &= \{(5z, -4z, z) \;;\; z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(5, -4, 1)z \;;\; z \in \mathbb{R}\} = [(5, -4, 1)]. \end{aligned}$$

Logo, $\{(5, -4, 1)\}$ é uma base de $E(\lambda = 2)$ e a multipicidade geométrica do autovalor 2 é 1.

- Autovalor -1

$$\begin{aligned} E(\lambda = -1) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;;\; x - 2y = 0 \text{ e } x - 3z = 0\} \\ &= \left\{\left(x, \tfrac{x}{2}, \tfrac{x}{3}\right) \;;\; x \in \mathbb{R}\right\} \\ &= \left\{\left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right) x \;;\; x \in \mathbb{R}\right\} = \left[\left(1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo, $\left\{\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right\}$ é uma base de $E(\lambda = -1)$ e a multipicidade geométrica do autovalor -1 é 1.

b) A matriz não é diagonalizável, pois não é possível construir uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A. Há no máximo dois autovetores linearmente independentes e $2 < 3 = \dim\mathbb{R}^3$.

Questão 2 (3,0 pontos): Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) [1,6 pts] Determine os autovalores e os respectivos autoespaços de A.

b) [0,8 pt] Determine uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de A, indicando os autovalores.

c) [0,6 pt] Determine uma matriz inversível P que diagonaliza A e a sua correspondente matriz diagonal D.

Solução:

a) O polinômio característico de A é:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda I_3 - A) \\ &= \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 \end{bmatrix} \\ &= \lambda\big((\lambda-1)(\lambda-1)-1\big) = \lambda(\lambda^2-2\lambda) = \lambda^2(\lambda-2). \end{aligned}$$

Os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$.

Para determinar os autoespaços $E(\lambda_1)$ e $E(\lambda_2)$ devemos resolver os sistemas lineares homogêneos associados, respectivamente, às matrizes $0I_3 - A$ e $2I_3 - A$.

Reduzindo por linhas a matriz $2I_3 - A$, obtemos:

$2I_3 - A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma escalonada, onde fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2$ e em $\sim_3$: $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ e $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$.

O sistema $(2I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, portanto tem as mesmas soluções. Assim, $x - z = 0$ e $y = 0$.

$$E(\lambda_1 = 2) \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - z = 0 \text{ e } y = 0\}$$

Reduzindo por linhas a matriz $0I_3 - A$, obtemos:

$0I_3 - A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma escalonada, onde fizemos a seguinte sequência de operações elementares: em $\sim_1$: $L_1 \leftarrow -L_1$ e em $\sim_2$: $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$.

O sistema $(0I_3 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é equivalente a $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, portanto tem as mesmas soluções. Assim, $x - y + z = 0$ e

$$E(\lambda_2 = 0) \quad = \quad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + z = 0\}$$

b) Aproveitando os cálculos de $E(\lambda_1 = 2)$ e de $E(\lambda_2 = 0)$ do item anterior, temos:

$$\begin{array}{rcl} E(\lambda_1 = 2) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - z = 0 \text{ e } y = 0\} \\ & = & \{(z, 0, z) \ ; \ z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(1, 0, 1)z \ ; \ z \in \mathbb{R}\} = [(1, 0, 1)]. \end{array}$$

Escolhemos o autovetor $v_1 = (1, 0, 1)$, fazendo $z = 1$.

$$\begin{array}{rcl} E(\lambda_2 = 0) & = & \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x - y + z = 0\} \\ & = & \{(y - z, y, z) \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(y, y, 0) + (-z, 0, z) \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & \{(1, 1, 0)y + (-1, 0, 1)z \ ; \ y, z \in \mathbb{R}\} \\ & = & = [(1, 1, 0), (-1, 0, 1)]. \end{array}$$

É possível escolher dois autovetores de A linearmente independentes em $E(\lambda_2 = 0)$, pois a sua dimensão é 2. Por exemplo, escolhemos $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (-1, 0, 1)$ fazendo, respectivamente, $y = 1$ e $z = 0$, $y = 0$ e $z = 1$.

Tomamos a base do $\mathbb{R}^3$ $\beta = \left\{ \underbrace{v_1 = (1, 0, 1)}_{\lambda_1 = 2}, \underbrace{v_2 = (1, 1, 0)}_{\lambda_2 = 0}, \underbrace{v_3 = (-1, 0, 1)}_{\lambda_3 = 0} \right\}$.

c) Uma matriz inversível P que diagonaliza T é a matriz de mudança de base, da base de autovetores $\{v_1, v_2, v_3\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^3$, e é dada por $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e a correspondente matriz diagonal é $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Questão 3 (2,3 pontos): Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a reflexão com respeito à reta ℓ de equação $5x + 12y = 0$.

a) [0,6 pt] Dê exemplos de vetores u e v tais que $T(u) = u$ e $T(v) = -v$, justificando a sua resposta.

b) [1,7 pts] Determine a matriz que representa, na base canônica do $\mathbb{R}^2$, a reflexão com respeito à reta ℓ.

Solução:

a) Como $u = (-12, 5) \in \ell$, então u gera ℓ e $T(u) = u$.
Como $v = (5, 12)$ é ortogonal a u, então v é perpendicular a ℓ e $T(v) = -v$.

b) Pelo item anterior, $\beta = \{\underbrace{v_1 = u = (-12, 5)}_{\lambda_1 = 1}, \underbrace{v_2 = v = (5, 12)}_{\lambda_2 = -1}\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T.

$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$ é a matriz de mudança de base, da base β para a base canônica,

P diagonaliza T e a correspondente matriz diagonal é $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Temos que $P^{-1} = \frac{1}{-169} \begin{bmatrix} 12 & -5 \\ -5 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{169} & \frac{5}{169} \\ \frac{5}{169} & \frac{12}{169} \end{bmatrix}$. Logo, a matriz de T na base canônica é

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 5 \\ 5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{169} & \frac{5}{169} \\ \frac{5}{169} & \frac{12}{169} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -12 & -5 \\ 5 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{169} & \frac{5}{169} \\ \frac{5}{169} & \frac{12}{169} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{119}{169} & -\frac{120}{169} \\ -\frac{120}{169} & -\frac{119}{169} \end{bmatrix}.$$

Questão 4 (3,2 pontos): Em cada item faça o que se pede.

a) [0,8 pt] Determine uma matriz ortogonal de ordem 2 tal que sua primeira coluna seja paralela a $(1, \sqrt{3})$.

b) [1,0 pts] A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável? Justifique sua resposta.

c) [1,4 pts] Determine os valores de a para que $\lambda = 1$ seja um autovalor com multiplicidade geométrica 2 da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução:

a) Vamos determinar um vetor $v = (a, b)$ ortogonal a $u = (1, \sqrt{3})$.
Então, $0 = \langle (a, b), (1, \sqrt{3}) \rangle = a + b\sqrt{3}$. Logo, $a = -b\sqrt{3}$. Tomando $b = 1$, obtemos $a = -\sqrt{3}$ e $v = (-\sqrt{3}, 1)$. Normalizando esses vetores temos $u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $u_2 = \frac{v}{\|v\|} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

A matriz $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ é uma das matrizes ortogonais com primeira coluna paralela a $(1, \sqrt{3})$.

Outras respostas possíveis são as matrizes: $\begin{bmatrix} u_1 & -u_2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -u_1 & u_2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} -u_1 & -u_2 \end{bmatrix}$.

b) A matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ é uma matriz triangular superior, logo seus autovalores são 1 e 2, os elementos da sua diagonal. B é diagonalizável, pois toda matriz de ordem $n = 2$ com $n = 2$ autovalores distintos é diagonalizável.

Outra justificativa: Como autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, então há dois autovetores de B linearmente independentes, formando uma base do $\mathbb{R}^2$ de autovetores. Logo, B é diagonalizável.

c) Devemos calcular $E(\lambda = 1)$, isto é, resolver o sistema linear homogêneo associado à matriz $I - A$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Reduzindo por linhas a matriz $I - A$, obtemos:

$$I - A = \begin{bmatrix} 0 & -a & -a \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -a \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\sim_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_2$$

Para continuarmos os cálculos precisamos saber se $a = 0$ ou $a \neq 0$.

Caso 1: $a = 0$

Nesse caso, $I - A \sim_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma em escada.

A solução do sistema linear homogêneo associado é

$$\begin{aligned} E(\lambda=1) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+0y+z=0\} \\ &= \{(-z,y,z) \ ;\ y,z\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-z,0,z)+(0,y,0) \ ;\ z,y\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-1,0,1)z+(0,1,0)y \ ;\ z,y\in\mathbb{R}\} = [(-1,0,1),(0,1,0)]. \end{aligned}$$

A multiplicidade geométrica do autovalor 1 é $\dim E(\lambda=1)=2$.

Caso 2: $a\neq 0$.

Nesse caso, $I-A \sim_2 A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -a & -a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{L_2 \leftarrow -\frac{1}{a}L_2}{\sim_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma em escada.

A solução do sistema linear homogêneo associado é

$$\begin{aligned} E(\lambda=1) &= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ ;\ x+z=0 \text{ e } y+z=0\} \\ &= \{(-z,-z,z) \ ;\ z\in\mathbb{R}\} \\ &= \{(-1,-1,1)z \ ;\ z\in\mathbb{R}\} = [(-1,-1,1)]. \end{aligned}$$

A multiplicidade geométrica do autovalor 1 é $\dim E(\lambda=1)=1$.

Portanto, para que a multiplicidade geométrica do autovalor 1 seja 2 devemos ter $a=0$.
