

Solução da 1ª Questão.

(a) (0,5 ponto) A Região R é mostrada na Figura 1

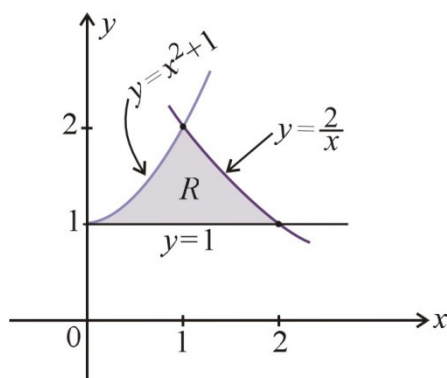


Figura 1

(b) (0,7 ponto) Nesta forma a região R precisa ser dividida em duas regiões, na Figura 2 mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

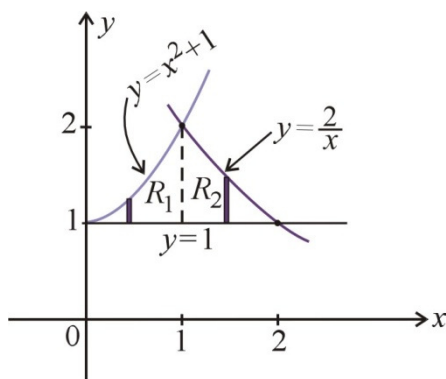


Figura 2

Neste caso a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável x :

$$A(R) = \int_0^1 ((x^2 + 1) - 1) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx$$

(c) (0,7 ponto) Na Figura 3 mostramos também um retângulo típico (ou representativo) horizontal na região.

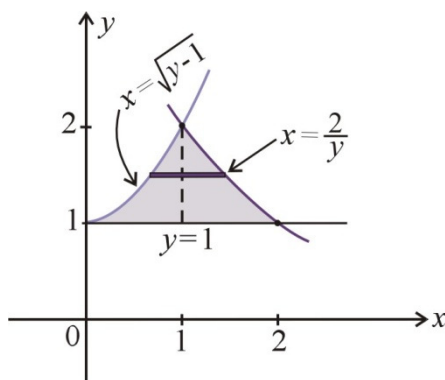


Figura 3

Neste caso a representação da área é feita por uma integral em relação à variável y :

$$A(R) = \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \sqrt{y-1} \right) dy$$

(d) (0,6 ponto) Observe-se que a representação mais conveniente é neste caso a representação em relação à variável y

$$A(R) = \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \sqrt{y-1} \right) dy = 2 \ln |y| - 2 \frac{(y-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{2}{3} = \frac{6 \ln 2 - 2}{3} \text{ unidades de}$$

área.

Se a representação mais conveniente para você é a representação em relação à variável x

Então

$$A(R) = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1 \right) dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + (2 \ln |x| - x) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + 2 \ln 2 - 2 - 2 \ln 1 + 1$$

$$A(R) = \frac{6 \ln 2 - 2}{3} \text{ unidades de área.}$$

Solução da 2ª Questão.

a) (1,0 ponto) Observe que o integrando $f(t) = \cos t^2$ é uma função contínua para todo t número real.

Como

$$F(x) = \int_{x^2}^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt = \int_{x^2}^1 \cos(t^2) dt + \int_1^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt$$

$$F(x) = - \int_1^{x^2} \cos(t^2) dt + \int_1^{(\ln x)^2} \cos(t^2) dt$$

Logo utilizando a 1ª forma do TFC e a regra da cadeia em cada somando obtemos

$$F'(x) = -\cos(x^2)^2 [x^2]' + \cos((\ln x)^2)^2 [(\ln x)^2]'$$

Ou seja

$$F'(x) = -(\cos(x^4))2x + (\cos(\ln x)^4)\left(\frac{2}{x} \ln x\right).$$

- b) (1,0 ponto)** Uma das formas de calcular a derivada é a derivação logarítmica. Aplicando $\ln$ a ambos membros temos

$$\ln(f(x)) = \ln\left(x^{\left(\frac{5}{x}\right)}\right) = \frac{5}{x} \ln x$$

Derivando em relação a x ambos os membros temos

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\frac{5}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{5}{x^2} \ln x = \frac{5}{x^2} (1 - \ln x)$$

Donde $f'(x) = x^{\left(\frac{5}{x}\right)} \frac{5}{x^2} (1 - \ln x) = 5x^{\left(\frac{5}{x} - x^2\right)} (1 - \ln x).$

Solução da 3ª Questão.

- (a) (1,5 ponto)** Para resolver a integral definida, usaremos o método de substituição:

Faça a substituição $u = \operatorname{tg} 2x \Rightarrow du = (\sec^2 2x) 2x dx \Rightarrow \frac{du}{2} = \sec^2 2x dx$. Precisamos também

fazer a mudança dos limites de integração. Enquanto x varia de 0 até $\frac{\pi}{8}$, u varia de $u=0$ até

$$u=1. \text{ Logo } \int_0^{\frac{\pi}{8}} (1 + \operatorname{tg} 2x)^3 \sec^2 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (1+u)^3 du = \frac{1}{2} \left[\frac{(1+u)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8} [(2)^4 - 1] = \frac{15}{8}.$$

- (b) (1,5 ponto)** Neste caso para calcular $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$, usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas. Faça

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = \frac{1}{x^2} dx \Rightarrow v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx &= (\ln x) \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 - \int_1^2 \left(-\frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} dx = -\frac{\ln 2}{2} + \int_1^2 x^{-2} dx \\ &= -\frac{\ln 2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{x} \Big|_1^2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} - 1 = -\left(\frac{1 + \ln 2}{2} \right) \end{aligned}$$

Solução da 4ª Questão.

- a) (0,2 ponto)** o domínio de f ;

Observe que f é o produto de duas funções definidas em $\mathbb{R}$, logo o domínio de f é $\mathbb{R}$

- b) (0,3 ponto)** As assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de f :

As assíntotas verticais não existem pois f é contínua em $\mathbb{R}$, já que é o produto de funções contínuas.

Observe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x)e^x = -\infty$. Logo não existe assíntota horizontal à direita

Por outro lado $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-x)}{e^{-x}} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-e^{-x}} = 0$, logo $y = 0$ é uma assíntota horizontal à esquerda

c) (0,5 ponto) Os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente:

Note-se que $f'(x) = (1-x)e^x + e^x(-1) = -xe^x$. assim $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

O único ponto crítico de f é $x = 0$. Vamos estudar o sinal de $f'(x)$

Intervalos	$-\infty < x < 0$	$0 < x < +\infty$
$(-x)$	+	-
e^x	+	+
$f'(x)$	+	-
f	$\nearrow$	$\searrow$

Logo f é crescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e f é decrescente no intervalo $(0, +\infty)$.

d) (0,3 ponto) Os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem):

Observando (c) e utilizando o teste da derivada primeira, podemos notar que $x = 0$ é ponto de máximo relativo e $f(0) = 1$ é o valor máximo relativo da função

Por outro lado, como $x = 0$ é o único ponto crítico temos que $f(0) = 1$ é o valor máximo absoluto da função. Portanto, $(0, 1)$ é um ponto de máximo absoluto. No entanto, do item (b) observamos que

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, assim podemos afirmar que f não assume valor mínimo absoluto.

e) (0,5 ponto) Os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-xe^x) = (-x)e^x - e^x = -e^x(x+1).$$

Note que $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Estudando o sinal de f'' , obtemos:

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < +\infty$
$(x+1)$	-	+
$-e^x$	-	-
$f''(x)$	+	-
Gráfico de f	$\cup$	$\cap$

Resumindo, temos então que o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(-\infty, -1)$, e o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-1, +\infty)$.

f) (0,2 ponto) Os pontos de inflexão (se existirem):

De (e) temos que:

$P = (-1, f(-1))$ é ponto de inflexão do gráfico de f pois existe mudança de concavidade e o gráfico possui reta tangente no ponto P (já que existe $f'(-1)$)

Como $f(-1) = \frac{2}{e}$ então $P = \left(-1, \frac{2}{e}\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico de f .

g) (0,5 ponto) Um esboço do gráfico de f é mostrado na figura 4;

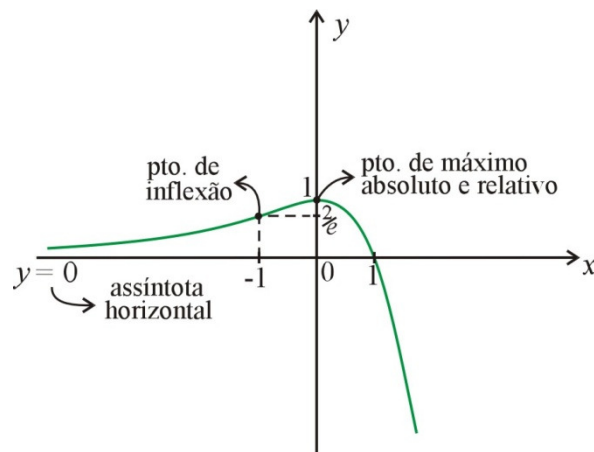


Figura 4