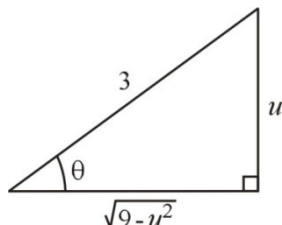


## AP2- CÁLCULO II-2013/2 Gabarito

**Solução da 1ª Questão (2,5 pontos).**

**(a) (1,0 ponto)**



Do triângulo retângulo associado tem-se:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{u}{3} \Rightarrow \begin{cases} u = 3 \operatorname{sen} \theta \\ du = 3 \cos \theta d\theta \end{cases} . \text{ Também } \frac{\sqrt{9-u^2}}{3} = \cos \theta \Rightarrow \sqrt{9-u^2} = 3 \cos \theta$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{9-u^2} du &= \int 3 \cos \theta 3 \cos \theta d\theta = 9 \int \cos^2 \theta d\theta = 9 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \frac{9}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} \int 2 \cos 2\theta d\theta = \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} \operatorname{sen} 2\theta + C \\ &= \frac{9}{2} \theta + \frac{9}{4} (2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + C = \frac{9}{2} \operatorname{arcsen} \left( \frac{u}{3} \right) + \frac{9}{2} \left( \frac{u}{3} \right) \frac{\sqrt{9-u^2}}{3} + C \\ &= \frac{9}{2} \operatorname{arcsen} \left( \frac{u}{3} \right) + \frac{u}{2} \sqrt{9-u^2} + C . \end{aligned}$$

**(b) (1,5 ponto)**  $\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx$

Note que a função racional é própria. Por outro lado  $x^2 + 9$  é um fator quadrático irredutível, pois  $b^2 - 4ac = 0 - 4(1)(9) < 0$ . Como o denominador é formado pelo fator quadrático irredutível repetido

$$(x^2 + 9)^2 \text{ então: } \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 9} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 9)^2} \quad (*)$$

Para determinar os valores de  $A, B, C$  e  $D$  multiplicamos ambos os lados da expressão (\*) pelo produto dos denominadores  $(x^2 + 9)^2$ , obtendo

$$x^2 - x + 9 = (Ax + B)(x^2 + 9) + (Cx + D)$$

$$0x^3 + x^2 - x + 9 = Ax^3 + Bx^2 + (9A + C)x + (9B + D)$$

$$\text{Assim da igualdade de polinômios temos: } \begin{cases} A = 0 & (1) \\ B = 1 & (2) \\ 9A + C = -1 & (3) \\ 9B + D = 9 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (4) temos

$$D = 0 \quad (5)$$

Substituindo (1) em (3) temos

$$C = -1 \quad (6)$$

Substituindo os valores das constantes em (\*) obtemos

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{x}{(x^2 + 9)^2}.$$

**obs.:** note que, no caso específico desta função, a decomposição poderia ter sido feita diretamente, pois

$$\frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} = \frac{(x^2 + 9) - x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^2 + 9}{(x^2 + 9)^2} - \frac{x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{x^2 + 9} - \frac{x}{(x^2 + 9)^2}$$

Assim

$$\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2 + 9} - \int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^2} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{(x^2 + 9)^2}$$

Faça a substituição  $u = x^2 + 9 \Rightarrow du = 2x dx$

$$= \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} - \frac{1}{2} \left( \frac{u^{-1}}{-1} \right) + C = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + \frac{1}{2u} + C$$

Portanto

$$\int \frac{x^2 - x + 9}{(x^2 + 9)^2} dx = \frac{1}{3} \arctg \frac{x}{3} + \frac{1}{2(x^2 + 9)} + C.$$

### Solução da 2ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto)  $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{e^{1/x}}{x^2} dx$

$$\int_1^t \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = - \int_1^t \left( -\frac{1}{x^2} \right) e^{1/x} dx = -e^{1/x} \Big|_1^t = -e^{1/t} + e$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{e^{1/x}}{x^2} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} (-e^{1/t}) + e = -1 + e = e - 1.$$

### (b) (1,0 ponto)

A integral dada é uma integral imprópria sobre um intervalo não limitado. Temos também que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt{4+x^3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3}{4+x^3}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{4+x^3}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{4}{x^3} + 1}} = 1.$$

Temos então que  $f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}}$  é contínua em  $[1, +\infty)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} = 1 \neq 0$ . Fica

caracterizada a divergência da integral imprópria, devido ao critério que diz: “Seja  $f$  contínua em  $[a, +\infty)$ , se

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$ , então  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  diverge.” Podemos então afirmar que  $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4+x^3}} dx$  diverge.

**Solução da 3ª Questão (3,0 pontos) .**

**(a) (1,5 ponto)** Desenhemos a Figura 1 mostrando a região e o eixo de rotação (eixo  $Ox$ ).

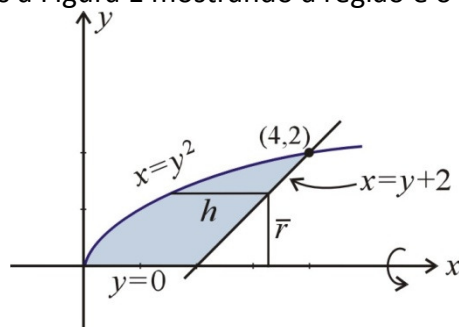


Figura 1

Identificamos a função altura da casca típica  $h(y)$  e o raio médio da casca típica  $\bar{r}(y)$  onde  $h(y) = (y+2) - y^2$  e  $\bar{r}(y) = y$  para  $0 \leq y \leq 2$ .

O volume é dado pela fórmula  $V = 2\pi \int_c^d \bar{r}(y) h(y) dy$ . Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_0^2 y(y+2 - y^2) dy = 2\pi \int_0^2 (y^2 + 2y - y^3) dy$$

$$V = 2\pi \left( \frac{y^3}{3} + 2\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( \frac{2^3}{3} + (2)^2 - \frac{2^4}{4} \right) = \frac{16\pi}{3} \text{ unidades de volume.}$$

**(b) (1,5 ponto)** Desenhemos a Figura 2 mostrando a região e o eixo de rotação (eixo  $Oy$ ).

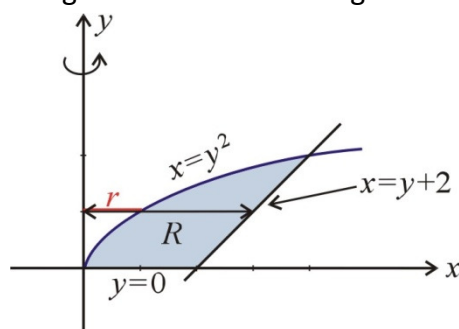


Figura 2

Identificamos as funções raio maior  $R(y)$  e o raio menor  $r(y)$ , onde  $R(y) = y + 2$ , e  $r(y) = y^2$  onde  $0 \leq y \leq 2$ .

O volume é dado pela fórmula  $V = \pi \int_c^d [(R(y))^2 - (r(y))^2] dy$ . Assim

$$V = \pi \int_0^2 [(y+2)^2 - (y^2)^2] dy = \pi \int_0^2 (y^2 + 4y + 4 - y^4) dy = \pi \left( \frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2} + 4y - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2$$

$$V = \pi \left( \frac{2^3}{3} + 4\frac{2^2}{2} + 4(2) - \frac{2^5}{5} \right) = \pi \left( \frac{184}{15} \right) \text{ unidades de volume.}$$

**Solução da 4ª Questão (2,5 pontos)****(a) (1,0 ponto)** Para  $y \neq 0$  temos

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{x^2 \sqrt{x^3 - 3}}{y^2} \Rightarrow y^2 dy = x^2 \sqrt{x^3 - 3} dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int x^2 \sqrt{x^3 - 3} dx \\ &\Rightarrow \int y^2 dy = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 - 3} dx \end{aligned} \quad (*)$$

Faça  $u = x^3 - 3 \Rightarrow du = 3x^2 dx$  logo  $\frac{1}{3} \int 3x^2 \sqrt{x^3 - 3} dx = \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \left( \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{2}{9} (x^3 - 3)^{\frac{3}{2}} + C_0$

Substituindo em (\*) temos  $\Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{2}{9} (x^3 - 3)^{\frac{3}{2}} + C_0$ , ou  $3y^3 = 2(x^3 - 3)^{\frac{3}{2}} + C$ .

**(b) (1,5 ponto)**  $\frac{dy}{dx} = \frac{4y + x^2}{x}$  tal que  $y = 2$  quando  $x = 1$ .

Observe que a equação,  $\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}y = x$  tal que  $y = 2$  quando  $x = 1$ , está na forma

padrão da equação linear de primeira ordem onde  $p(x) = -\frac{4}{x}$  e  $q(x) = x$  sendo  $p$  e  $q$

funções contínuas em  $I = (0, +\infty)$ . Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula. Note que

$$\int p(x) dx = \int -\frac{4}{x} dx = -4 \ln |x| = \ln x^{-4} \quad x \in I, \text{ pois } x > 0 \text{ em } I = (0, +\infty).$$

Assim, o fator integrante é  $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ ,  $x \in I$ . Logo, multiplicando

a equação diferencial pelo fator  $\mu(x)$ , resulta:

$$\underbrace{\frac{1}{x^4} \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x^5} y}_{\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^4} y \right)} = \frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x^4} y \right) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow \frac{y}{x^4} = \int \frac{1}{x^3} dx \Rightarrow \frac{y}{x^4} = -\frac{1}{2x^2} + C, \text{ onde } C \text{ é uma constante}$$

arbitrária.

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} x^2 + C x^4, \text{ onde } x \in I, \text{ é a solução geral da equação diferencial linear dada. Para}$$

achar a solução particular temos que  $y = 2$  quando  $x = 1 \Rightarrow 2 = -\frac{1}{2} + C$

$$\Rightarrow C = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \text{ Logo a solução do problema de valor inicial é}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{2} x^4 \quad \text{ou} \quad y = \frac{x^2}{2} (5x^2 - 1).$$