

RESPOSTAS – AP3 – CÁLCULO 1 – 22/06/2014

Nome:	Matrícula:
Pólo:	Data:

Atenção!

- Identifique a Prova, colocando Nome, Matrícula, Polo e Data;
- É expressamente proibido o uso de calculadoras;
- Devolver a prova e a folha de respostas ao responsável;
- O desenvolvimento das questões pode ser a lápis. No entanto, as respostas deverão estar necessariamente à caneta;
- É expressamente proibido o uso de corretivo nas respostas.

Questão 1 [2 pontos]

Calcule os seguintes limites de funções:

(a)[1 ponto] $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - x^2 - 20x}{x^2 + 4x}$

(b)[1 ponto] $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x^2)}{x - \cos(1 - x^2)}$

Solução:

(a) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - x^2 - 20x}{x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x(x^2 - x - 20)}{x(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x(x + 4)(x - 5)}{x(x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -4} x - 5 = -9$

(b) Temos que $\lim_{x \rightarrow 1} \sin(1 - x^2) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} x - \cos(1 - x^2) = 0$. Logo, podemos aplicar a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(1 - x^2)}{x - \cos(1 - x^2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-2x) \cos(1 - x^2)}{1 + (-2x) \sin(1 - x^2)} = -2$$

Questão 2 [2 pontos]

Encontre as assíntotas verticais e as assíntotas horizontais do gráfico da função f dada abaixo, fazendo um estudo completo dos limites infinito e no infinito:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 - x}$$

Solução:

Temos que:

(i) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 - x} = -\infty$, pois $\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \sqrt{5} > 0$ e $2 - x \rightarrow 0^-$ quando $x \rightarrow 2^+$;

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 - x} = +\infty$, pois $\sqrt{x^2 + 1} \rightarrow \sqrt{5} > 0$ e $2 - x \rightarrow 0^+$ quando $x \rightarrow 2^-$;

(iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = -1;$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}}{x \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x \left(\frac{2}{x} - 1\right)} = 1;$$

De (i) e (ii), concluímos que a reta $x = 2$ é a única *assíntota vertical* do gráfico de f e, de (iii) e (iv), concluímos que as retas $y = -1$ e $y = 1$ são as *assíntotas horizontais* do gráfico de f .

Questão 3 [2 pontos]

Calcule a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a)[1 ponto] $f(x) = \arcsen(x^3)$

(a)[1 ponto] $f(x) = (x^2 + 4)(1 - e^{2x})$

Solução:

$$(a) f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} \cdot (3x^2) = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}$$

$$(b) f'(x) = (2x)(1 - e^{2x}) + (x^2 + 4)(-2e^{2x}) = (x^2 + x + 4)(-2e^{2x}) + 2x$$

Questão 4 [2 pontos]

Um ponto move-se ao longo da curva $10y - x^4 - 2x = 1$ de tal modo que sua abscissa x varia a uma velocidade constante de 5 cm/s. Determine a velocidade da ordenada y quando $x = 2$.

Solução:

Derivando implicitamente, obtemos

$$10 \frac{dy}{dt} - 4x^3 \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} = 0.$$

Como $\frac{dx}{dt} = 5$, segue que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{20x^3 + 10}{10}.$$

Daí, quando $x = 2$,

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=2} = \frac{20(2)^3 + 10}{10} = 17.$$

Portanto, a velocidade da ordenada y , quando $x = 2$, é de 17 cm/s.

Questão 5 [2 pontos]

Considere a função $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$. Determine a concavidade e, se existirem, os pontos de inflexão do gráfico de f .

Solução:

Temos que $f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, e $f''(x) = \frac{8x-8}{(x-1)^4} = \frac{8}{(x-1)^3}$, para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. Daí,

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$;
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x-1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Portanto, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima no intervalo $(1, +\infty)$, tem concavidade voltada para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$ e não possui nenhum ponto de inflexão.