AP3- CÁLCULO II- 2013/1 Gabarito

1ª Questão (3,5 pontos) Considere a região R sombreada mostrada na seguinte figura:

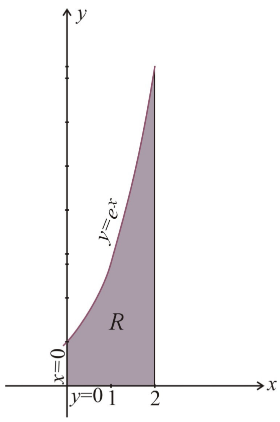

Figura 1.

(a) (1,0 ponto) Calcule a área da região R.

(b) (1,0 ponto) Use o método dos discos ou arruelas para achar o volume do sólido S gerado pela rotação da região R em torno do eixo Ox.

(c) (1,5 ponto) Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume do sólido S gerado pela rotação da região R em torno do eixo Oy.

Solução da 1ª Questão

(a) (1,0 ponto) $A(R)=\int_0^2 e^x\,dx = e^x\Big]_0^2 = e^2-e^0=e^2-1$ unidades de área.

(b) $V=\pi\int_0^2 \left[R(x)\right]^2 dx$, onde $R(x)=e^x>0$. Veja a Figura 2.

$$V(R)=\pi\int_0^2 \left[e^x\right]^2 dx=\pi\int_0^2 e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^2 2e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2}\left(e^{2x}\right)\Big]_0^2=\frac{\pi}{2}\left(e^4-e^0\right)=\frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right)$$

unidades de volume.

(c) $V=2\pi\int_0^2 \bar{r}(x)h(x)dx$, onde $\bar{r}(x)=x\geq 0$ e $h(x)=e^x>0$ em particular para $0\leq x\leq 2$.

Veja a Figura 3.

$$V(R)=2\pi\int_0^2 \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x\,dx}_{dv}=2\pi\left[\left(\underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^x}_{v}\right)\Bigg|_0^2-\int_0^2 \underbrace{e^x}_{v}\underbrace{dx}_{du}\right]=2\pi\left[2e^2-e^x\Big|_0^2\right]=2\pi(\underbrace{2e^2-e^2}_{e^2}+\underbrace{e^0}_{1})=2\pi(e^2+1)$$

unidades de volume.

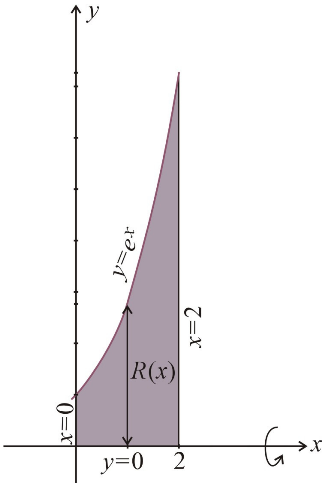

Figura 2.

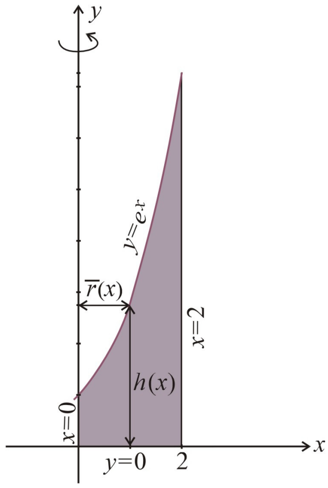

Figura 3.

2ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,0 ponto) Usando o método de substituição trigonométrica, calcule $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$.

(b) (1,5 ponto) Usando o método de frações parciais, calcule $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

Solução da 2ª Questão

(a) Do triângulo retângulo associado mostrado na Figura 4 , temos que

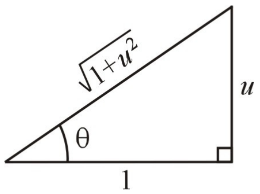

Figura 4.

$u = \operatorname{tg}\theta$, $\quad du = \sec^2\theta\, d\theta$, $\quad \sec\theta = \frac{\sqrt{1+u^2}}{1} = \sqrt{1+u^2}$. Logo

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec\theta} = \int \sec\theta\, d\theta = \ln|\sec\theta + \operatorname{tg}\theta| + C = \ln|\sqrt{1+u^2} + u| + C .$$

(b) A função $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$ é uma função racional própria. O denominador tem dois fatores, um linear e um quadrático irredutível, logo a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad (*)$$

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $(x+1)(x^2+1)$, obtendo

$1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1)$

Isto é

$1 = (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ B+C=0 \\ A+C=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A-C=0 \\ \underline{A+C=1} \\ 2A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ C=\dfrac{1}{2} \\ B=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad (**)$$

Substituindo em (*) os valores achados em (**) temos

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2(x+1)}+\frac{-x+1}{2(x^2+1)}$$

Assim

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x\,dx}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

3ª Questão (2,0 pontos)

a) (1,0 ponto) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4x^2+9}$.

b) (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral $\displaystyle\int_{e}^{+\infty}\frac{1}{x^2\ln x}\,dx$ utilizando algum dos critérios apresentados em aula.

Solução da 3ª Questão

(a) Observe que $f(x)=\dfrac{1}{4x^2+9}$ é contínua no intervalo $(-\infty,0]$. Assim a integral dada resulta numa integral imprópria sobre o intervalo não limitado $(-\infty,0]$.

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{4x^2+9}=\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4x^2+9} \qquad (1)$$

Por outro lado

$$\int\frac{dx}{4x^2+9}\underset{du=2dx}{\overset{u=2x}{=}}\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+3^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(\frac{u}{3})\right)+C=\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{2x}{3})+C \qquad (2)$$

Assim de (1), (2) e a 2ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo resulta

$$\lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0}\frac{dx}{4x^2+9}=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{2x}{3})\Big]_a^0=\lim_{a\to-\infty}\left(-\frac{1}{6}\operatorname{arctg}(\frac{2a}{3})\right)=-\frac{1}{6}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{12},$$

pois $a\to-\infty\Rightarrow\dfrac{2a}{3}\to-\infty\Rightarrow arctg\left(\dfrac{2a}{3}\right)\to-\dfrac{\pi}{2}$.

(b) Note que para $\forall\, x\geq e$ resulta que $\ln x\geq\ln e=1$ e, em particular, $\dfrac{1}{\ln x}\leq 1$. Portanto $0<\dfrac{1}{x^2\ln x}\leq\dfrac{1}{x^2}$, para $x\geq e$. (1)

Por outro lado $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_e^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right]_e^b = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{b}+\frac{1}{e}\right] = \frac{1}{e}$ converge. (2)

Logo de (1), (2) e o critério de comparação resulta que $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2 \ln x}\,dx$ converge.

4ª Questão (2,0 pontos)

a) (1,0 ponto) Usando variáveis separáveis, encontre a solução geral implícita da equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}^2 y}$.

b) (1,0 ponto) Encontre a solução da equação diferencial de primeira ordem $xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0$ tal que $y(1) = 2$.

Solução da 4ª Questão

(a) Da equação dada temos que $\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\mathrm{tg}^2 y}$

Podemos separar as variáveis na forma:

$$\mathrm{tg}^2 y\,dy = \sec^2 x\,dx \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{tg}^2 y\,dy = \int \sec^2 x\,dx \;\Rightarrow\; \int (\sec^2 y - 1)\,dy = \int \sec^2 x\,dx$$

$\mathrm{tg}\,y - y = \mathrm{tg}\,x + C$ ou $\mathrm{tg}\,y - y - \mathrm{tg}\,x = C$ é a solução na forma implícita, da equação diferencial dada.

(b) Da equação diferencial dada, segue que $y' = x + \frac{3y}{x}$ logo $y' - \frac{3y}{x} = x$ é linear, com $p(x) = -\frac{3}{x}$ e $q(x) = x$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\int p(x)\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx = -3\ln|x| = \ln|x|^{-3}$. Por outro lado, do valor inicial vemos que $x > 0$, assim $\ln|x|^{-3} = \ln x^{-3}$ .Portanto, o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\ln x^{-3}} = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

.Logo $$\underbrace{y'\frac{1}{x^3} - \frac{3}{x^4}y}_{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right)} = \frac{x}{x^3} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}y\right) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{1}{x^3}y = \int \frac{1}{x^2}\,dx + C$$

Isto é $\frac{1}{x^3}y = \frac{x^{-1}}{-1} + C \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3}y = -\frac{1}{x} + C \quad \Rightarrow \quad y = Cx^3 - x^2$ é a solução geral da equação diferencial dada. Para resolver o problema de valor inicial observe que $y(1) = -1 + C = 2 \quad \Rightarrow \quad C = 3$.

Portanto a solução do problema de valor inicial dado é: $\boxed{y = 3x^3 - x^2}$.