

Cálculo II – AD1 (2013/2) – Gabarito

Solução da 1ª Questão

Considere a figura 1.1 abaixo , representando o mesmo gráfico dado no enunciado

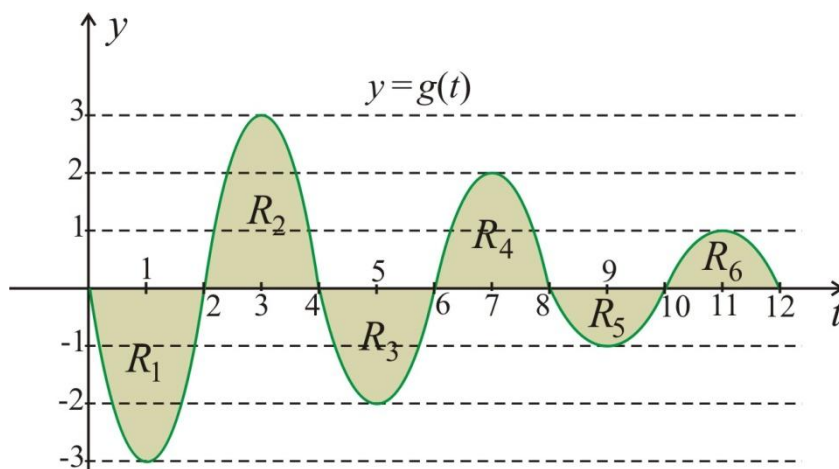


Figura 1.1

Denotemos por

$A_1 = \text{área}(R_1)$, $A_2 = \text{área}(R_2)$, $A_3 = \text{área}(R_3)$, $A_4 = \text{área}(R_4)$, $A_5 = \text{área}(R_5)$ e $A_6 = \text{área}(R_6)$.

De acordo com os dados do enunciado, a figura naturalmente nos dá que:

$$A_1 = A_2 > A_3 = A_4 > A_5 = A_6 > 0. \quad (*)$$

- a) Por definição $G(0) = \int_0^0 g(t) dt = 0$, como visto no caderno didático, uma vez que os extremos de integração são os mesmos, ambos iguais a zero e g esta definida em $t = 0$.

Pela definição 2.2 do caderno didático, tem-se:

$$A_1 = -\int_0^2 g(t) dt, \quad A_2 = \int_2^4 g(t) dt, \quad A_3 = -\int_4^6 g(t) dt, \quad A_4 = \int_6^8 g(t) dt, \quad A_5 = -\int_8^{10} g(t) dt \quad \text{e} \quad A_6 = \int_{10}^{12} g(t) dt .$$

Estimativa para $G(2)$:

Por definição: $G(2) = \int_0^2 g(t) dt = -A_1 < 0 = G(0)$, isto é , $G(2) = -A_1 < G(0) = 0$

Estimativa para $G(4)$:

Novamente, usando a definição , a proposição 2.2 do caderno didático e (*), obtemos:

$$G(4) = \int_0^4 g(t) dt = \int_0^2 g(t) dt + \int_2^4 g(t) dt = -A_1 + A_2 = A_2 - A_1 = 0 = G(0). \quad (*)$$

Portanto

$$\boxed{G(2) < G(0) = G(4) = 0} \quad (1)$$

Estimativa para $G(6)$:

$$G(6) = \int_0^6 g(t) dt = \int_0^4 g(t) dt + \int_4^6 g(t) dt = G(4) + (-A_3) = 0 - A_3 = -A_3.$$

Agora, por um lado, multiplicando as desigualdades em (*) por (-1), segue que

$$-A_1 = -A_2 < -A_3 = -A_4 < -A_5 = -A_6 < 0 \quad (**)$$

Portanto

$$\boxed{G(2) < G(6) < 0 = G(0) = G(4)} \quad (2)$$

Estimativa para $G(8)$: procedendo como antes,

$$G(8) = \int_0^8 g(t) dt = \int_0^6 g(t) dt + \int_6^8 g(t) dt = G(6) + A_4 = -A_3 + A_4 = 0 \quad (*)$$

Portanto

$$\boxed{G(2) < G(6) < 0 = G(0) = G(4) = G(8)} \quad (3)$$

Estimativa para $G(10)$:

$$G(10) = \int_0^{10} g(t) dt = \int_0^8 g(t) dt + \int_8^{10} g(t) dt = G(8) + (-A_5) = 0 - A_5 = -A_5$$

Portanto, por (**), segue que

$$\boxed{G(2) < G(6) < G(10) < 0 = G(0) = G(4) = G(8)} \quad (4)$$

Estimativa para $G(12)$:

$$G(12) = \int_0^{12} g(t) dt = \int_0^{10} g(t) dt + \int_{10}^{12} g(t) dt = -A_5 + A_6 = 0 \quad (*)$$

Portanto

$$G(2) < G(6) < G(10) < 0 = G(0) = G(4) = G(8) = G(12) \quad (5)$$

(b) Pela primeira forma do T.F.C., segue que $G'(x) = g(x)$, para todo $x \in [0, 12]$.

De acordo com o gráfico, tem-se $g(x) > 0$ nos intervalos $(2, 4)$, $(6, 8)$ e $(10, 12)$ e $g(x) < 0$, nos intervalos $(0, 2)$, $(4, 6)$ e $(8, 10)$.

A tabela abaixo apresenta o comportamento do sinal de $G'(x) = g(x)$ e portanto dá a informação sobre crescimento e decrescimento de $G(x)$

Intervalos	$0 < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 6$	$6 < x < 8$	$8 < x < 10$	$10 < x < 12$
$G'(x) = g(x)$	–	+	–	+	–	+
$G(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Assim, a função $G(x)$ é crescente em $(2, 4) \cup (6, 8) \cup (10, 12)$ e é decrescente em $(0, 2) \cup (4, 6) \cup (8, 10)$.

(c) Pelo item anterior e o teste da derivada primeira, temos que $x = 4$ e $x = 8$ são pontos de máximo locais e $x = 2$, $x = 6$ e $x = 10$ são pontos de mínimo locais.

Por outro lado, de (b) segue que G é contínua no intervalo fechado $[0, 12]$. Logo segue ainda de (5), no item (a), que $x = 2$ é o ponto de mínimo absoluto e $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$ e $x = 12$ são pontos de máximo absolutos.

(d)

Para estudarmos os pontos de inflexão e as mudanças de concavidade no gráfico de $G(x)$, devemos estudar o sinal de $G''(x)$.

Como $G'(x) = g(x)$ e g é derivável no intervalo $(0, 12)$, segue que $G''(x) = g'(x)$.

Lembre-se que $g'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto

$P(x, g(x))$ que, neste caso, é positiva nos intervalos em que g é crescente (vide figura 1.2), e negativa nos intervalos em que g é decrescente (vide figura 1.3).

Assim, a tabela seguinte nos dá o comportamento do sinal de $G''(x)$.

Intervalos	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < 7$	$7 < x < 9$	$9 < x < 11$	$11 < x < 12$
$g''(x) = f'(x)$	–	+	–	+	–	+	–
Concavidade do gráfico de g	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

A tabela acima nos diz que existe mudança de concavidade em $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$, $x = 9$ e $x = 11$ e existe reta tangente nos pontos $(1, G(1))$, $(3, G(3))$, $(5, G(5))$, $(7, G(7))$, $(9, G(9))$ e $(11, G(11))$, logo os pontos mencionados são pontos de inflexão e portanto as abscissas dos pontos de inflexão ocorrem em $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$, $x = 9$ e $x = 11$.

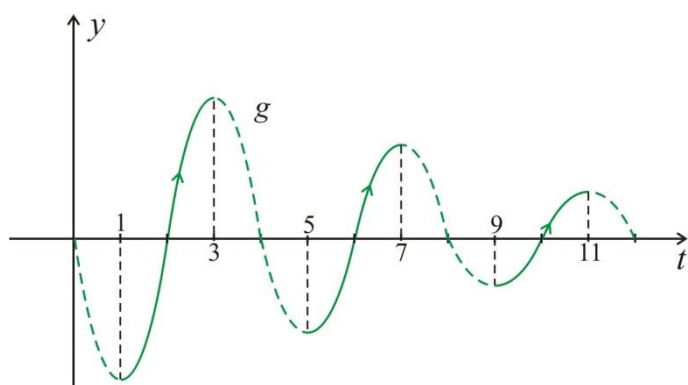


Figura 1.2

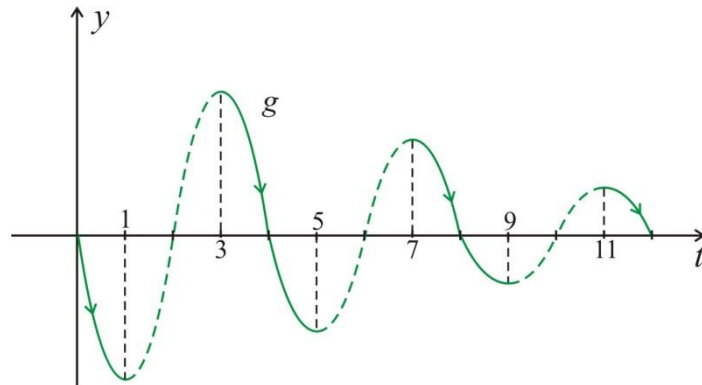


Figura 1.3

- (e) A tabela acima nos disse que o gráfico de G tem concavidade para cima em $(1,3) \cup (5,7) \cup (9,11)$ e para baixo em $(0,1) \cup (3,5) \cup (7,9) \cup (11,12)$.
- (f) Juntando os dados dos itens anteriores, podemos dar um esboço aproximado do gráfico da função G . O esboço do gráfico é dado na figura 1.4 a seguir:

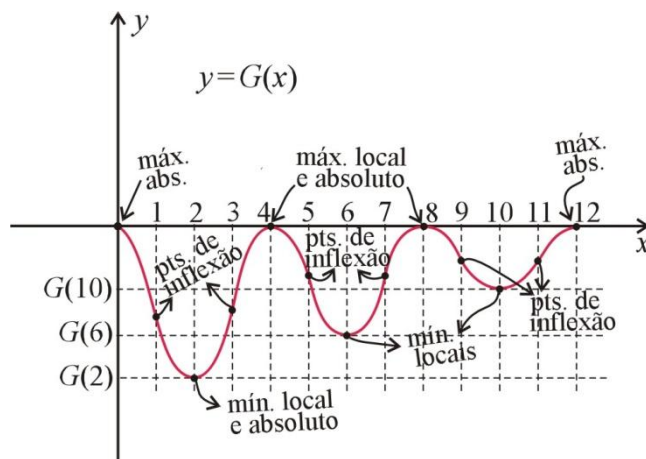


Figura 1.4

Observe que não nos é dada a expressão que define a função g . A única informação que nos é dada no enunciado é que $A_1 = A_2 > A_3 = A_4 > A_5 = A_6 > 0$, o que nos permitiu comparar apenas alguns dos valores de $G(x)$ dados no item (a).

Solução da 2ª Questão

- (a) O gráfico da função f é exibido na figura 2.1 a seguir

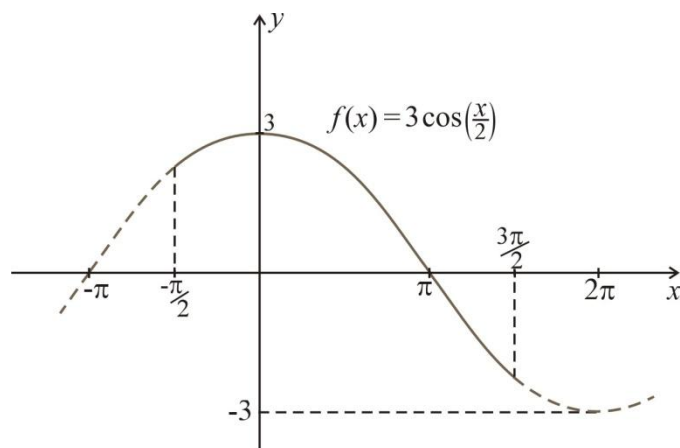


Figura 2.1

Note que

$$\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) \right)' = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo, função $F(x) = 6 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ tem como derivada

$$F'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x).$$

Portanto, pelo TFC, temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(6 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) - \left(6 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}$$

(b)

$$\text{Lembre que } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx \quad (*)$$

Como $f(x) > 0$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = \text{área da região } R_1$, vide figura 2.2.

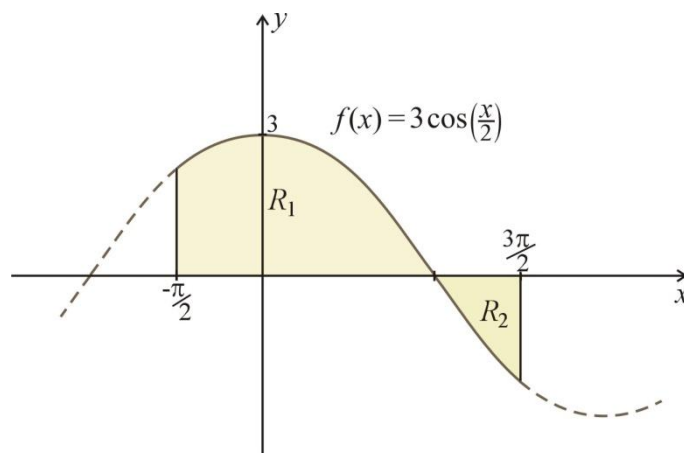


Figura 2.2

Já $f(x) < 0$, para $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Neste caso, $\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = -(\text{área da região } R_2)$.

Substituindo os valores anteriores em (*) temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = (\text{área da região } R_1) - (\text{área da região } R_2).$$

Portanto, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$ representa a diferença entre a área da região R_1 e a da região R_2 .

Como este número resultou em $6\sqrt{2} > 0$, tem-se que a área da região R_1 é maior que a da região R_2 .

(c) A área da região procurada é a soma das áreas das regiões R_1 e R_2 .

Ou seja

área da região = área da região R_1 + área da região R_2

Como visto no item anterior,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx = \text{área da região } R_1 \quad \text{e} \quad \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx = -(\text{área da região } R_2) \quad (*)$$

Logo

$$\text{área da região} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x) dx &= \left[F(\pi) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F(\pi) \right] = \\
 &= \left[6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - 6 \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] - \left[6 \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 6 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \\
 &= 6 + 6 \frac{\sqrt{2}}{2} - 6 \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = 12
 \end{aligned}$$

Portanto, a área da região é 12 u.a.

Solução da 3ª Questão

(a) Tem-se $F(x) = h(g(x))$, em que $h(x) = \int_1^x f(t) dt$ e $g(x) = x^3 + 3x^2$.

Pela regra da cadeia, tem-se que

$$F'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Por um lado, segue do TFC que $h'(x) = f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por hipótese. Em particular, $h'(g(x)) = f(g(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

Avaliemos o sinal da derivada $F'(x)$:

Intervalos	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$g'(x) = 3x(x+2)$	+	-	+
$h'(g(x)) = f(g(x))$	+	+	+
$F'(x)$	+	-	+
$F(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Logo, os intervalos de crescimento da função $F(x)$ são $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. $F(x)$ é decrescente em $(-2, 0)$.

$$(b) \quad H(x) = \int_{\operatorname{sen} x}^{x^3} \frac{3}{1+t^4} dt = \int_{\operatorname{sen} x}^0 \frac{3}{1+t^4} dt + \int_0^{x^3} \frac{3}{1+t^4} dt = - \int_0^{\operatorname{sen} x} \frac{3}{1+t^4} dt + \int_0^{x^3} \frac{3}{1+t^4} dt = -F(x) + G(x) \quad (*)$$

em que

$$F(x) = h(\operatorname{sen} x) \quad \text{e} \quad G(x) = h(x^3), \quad \text{sendo} \quad h(x) = \int_0^x \frac{3}{1+t^4} dt$$

Denotemos $f(t) = \frac{3}{1+t^4}$. Pelo TFC, $h'(x) = f(x)$.

Pela regra da cadeia:

$$F'(x) = h'(\sin x) \cdot (\sin x)' = f(\sin x) \cdot \cos x = \frac{3 \cos x}{1 + \sin^4 x}$$

$$G'(x) = h'(x^3) \cdot (x^3)' = f(x^3) \cdot 3x^2 = \frac{9x^2}{1 + x^{12}}$$

Por (*), tem-se $H'(x) = -F'(x) + G'(x) \Rightarrow H'(0) = -F'(0) + G'(0) = -\frac{3 \cos 0}{1 + \sin^4 0} + \frac{9 \cdot 0^2}{1 + 0^{12}} = -3$

Solução da 4ª Questão

- (a) A expressão algébrica $x^2 = y^3$ pode ser reescrita como uma função de x na forma $y = x^{2/3}$ ou como função de y na forma $x = y^{3/2}$ e tem como gráfico a figura 4.1

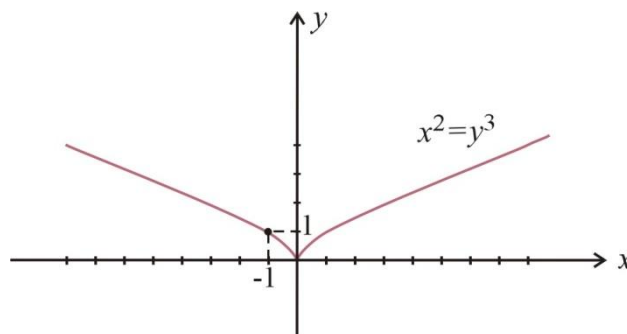


Figura 4.1

A expressão $x - 3y + 4 = 0$ pode ser escrita como função de x na forma $y = \frac{x+4}{3}$ ou como função de y como $x = 3y - 4$ e tem o gráfico mostrado na figura 4.2

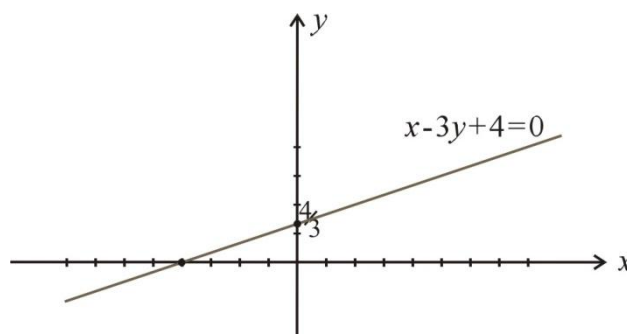


Figura 4.2

Sobrepondo os gráficos, obtemos a figura hachurada mostrada em 4.3

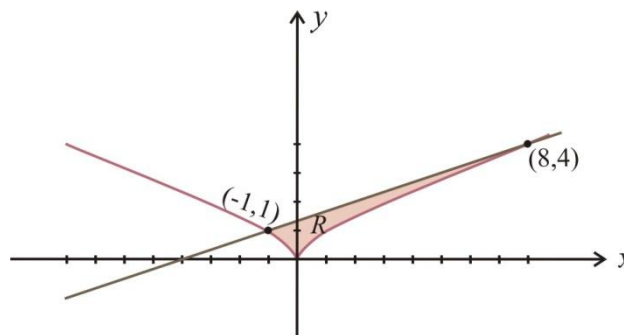


Figura 4.3

Para obter os pontos de interseção, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 = y^3 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Verifica-se facilmente que $x = -1$ e $y = 1$ é uma solução.

Isolando y na segunda equação e elevando ao quadrado fica

$$x^2 = 9y^2 - 24y + 16.$$

Substituindo acima a primeira equação de (*) tem-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = 0 \quad (**)$$

Como já sabemos que $y = 1$ é solução de (**), dividimos o polinômio acima por $y - 1$ e obtém-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = (y - 1) \cdot (y - 4)^2.$$

Portanto, $y = 4$ é a outra solução repetida do polinômio (**) e usando isso em (*) vemos que a abscissa correspondente é $x = 8$, como mostrado na figura 4.3.

(b) Como está visto na figura 4.3, para expressar a área como uma integral em termos de x , não é necessário fazer qualquer tipo de mudança.

Neste caso:

$$A(R) = \int_{-1}^8 \left(\frac{x+4}{3} - x^{2/3} \right) dx$$

(c) Para representarmos a área em termos de uma integral com relação a y , devemos dividir a região da figura 4.3 em duas, como mostrado na figura 4.4

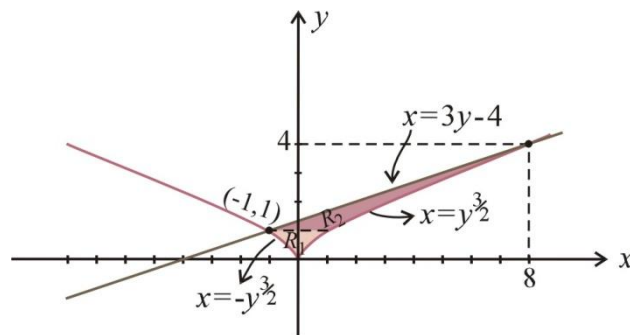


Figura 4.4

Neste caso:

$$A(R) = \underbrace{\int_0^1 (y^{3/2} - (-y^{3/2})) dy}_{A(R_1)} + \underbrace{\int_1^4 (y^{3/2} - 3y + 4) dy}_{A(R_2)}$$

(d) Usando a expressão mais simples obtida no item (b), tem-se:

$$A(R) = \int_{-1}^8 \left(\frac{x+4}{3} - x^{2/3} \right) dx = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{4}{3} x \right) \Big|_{-1}^8 = \frac{27}{10}$$

Solução da 5ª Questão

Uma reta passando pela origem com inclinação m tem equação dada por $y = mx$. Um ponto de interseção da reta $y = mx$ com a parábola $y = x - x^2$ tem a forma $P(a, ma)$, como indicado na figura 5.1 a seguir. As regiões são também indicadas na figura.

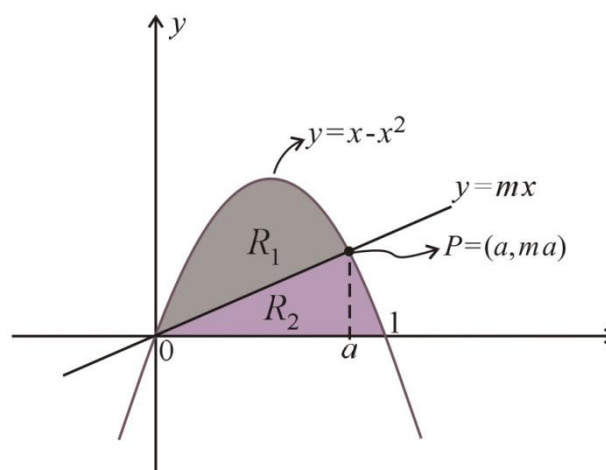


Figura 5.1

No ponto de interseção $P(a, ma)$, tem-se

$$ma = a - a^2 \Rightarrow a^2 + (m-1)a = 0 \Rightarrow a.(a + (m-1)) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } \boxed{a = 1-m} \quad (*)$$

Calculando a área da região R_1 , obtemos:

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^a ((x - x^2) - mx) dx = \int_0^a (-x^2 + (1-m)x) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{(1-m)x^2}{2} \right]_0^a \stackrel{(*)}{=} \frac{(1-m)^3}{3} + \frac{(1-m)(1-m)^2}{2} = \frac{(1-m)^3}{6} \end{aligned} \quad (1)$$

Para calcular a área da região R_2 , vamos dividi-la em duas subregiões, como mostra a figura 5.2

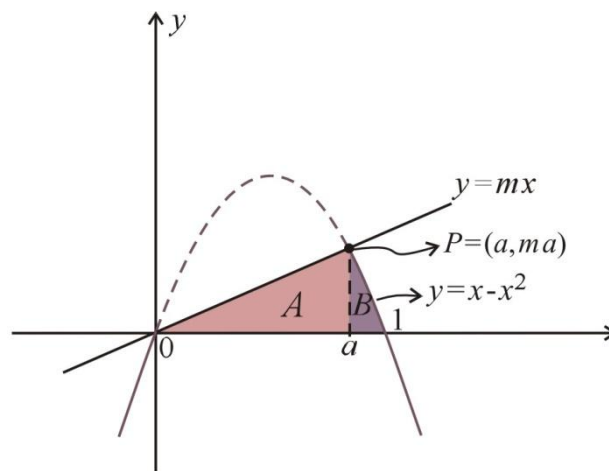


Figura 5.2

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \underbrace{\frac{a.ma}{2}}_{\text{área}(A)} + \underbrace{\int_a^1 ((x - x^2) - 0) dx}_{\text{área}(B)} = \frac{ma^2}{2} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_a^1 \stackrel{(*)}{=} \frac{m(1-m)^2}{2} + \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{(1-m)^2}{2} - \frac{(1-m)^3}{3} \right) \right] = \\ &= (1-m)^2 \cdot \left[\frac{m}{2} + \frac{1-m}{3} - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{6} = (1-m)^2 \cdot \left[\frac{3m+2-2m-3}{6} \right] + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} - \frac{(1-m)^3}{6} \end{aligned} \quad (2)$$

Assim, segue de (1) e (2) que:

$$\begin{aligned} A(R_1) &= A(R_2) \Leftrightarrow \frac{(1-m)^3}{6} = \frac{1}{6} - \frac{(1-m)^3}{6} \\ \Rightarrow \frac{2(1-m)^3}{6} &= \frac{1}{6} \Rightarrow (1-m)^3 = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-m = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow \boxed{m = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}} \end{aligned}$$