Equações Diferenciais - Exercícios Suplementares para a AP1

Mensagem do Coordenador:

Caros alunos(as),
O objetivo desta lista é apresentar alguns exercícios resolvidos para ajudá-los na preparação para a 1^a A.P. de Equações Diferenciais.

Bons estudos e boa avaliação!

Um abraço
Pedro Nobrega

Exercício 1

Identifique as equações de Riccati na lista abaixo:

a) $xy' + x\,y^2 = y$

b) $x^2\,y' + y^3 = x\,y^2$

c) $xyy' + x^2 = (2x+3)\,y$

d) $y' + y + y^2 = \sqrt{x}$

Soluções:

a) $xy' + x\,y^2 = y$.

Dividindo por x : $y' + y^2 - \dfrac{1}{x}\,y$ que é uma equação de Riccati em qualquer intervalo que não contenha $x_0 = 0$

b) $x^2\,y' + y^3 = x\,y^2$.

Dividindo por x^2 : $y' + \dfrac{1}{x^2}\,y^3 - \dfrac{1}{x}\,y^2 = 0$ que não pode ser uma equação de Riccati pois não pode ser posta na forma padrão das equações de Riccati em nenhum intervalo.

c) $xyy' + x^2 = (2x+3)\,y$

Dividindo por xy (em qualquer intervalo em que $x \neq 0$; e também o correspondente y não seja nulo) : $y' + x\,y^{-1} = 2 + \dfrac{3}{x}$; que não pode ser uma equação de Riccati pois não pode ser posta na forma padrão das equações de Riccati em nenhum intervalo.

d) $y' + y + y^2 = \sqrt{x}$

Observamos que se trata de uma equação de Riccati, de coeficientes constantes, que já está na forma padrão .

Comentário: O nosso critério para a identificação de equações de Riccati, pelo menos neste curso, tem sido o de verificar se a equação está ou pode ser posta na forma padrão das equações de Riccati:

$$y' + a_2(x)\, y^2 + a_1(x)\, y + a_0(x) = 0.$$

Observe que, algumas vezes temos de "trabalhar a equação" para re-escrevê-la na forma padrão. Mesmo às custas de restringir os domínios das variáveis.

Exercício 2

a) A equação

$$\frac{yy'}{x} + xy^2 = 1 \tag{1}$$

é uma equação de Riccati?

b) Mostre que a mudança de variáveis $y^2 = xz$ transforma a equação (**??**) numa equação diferencial linear nãohomogênea de primeira ordem.

c) Mostre que a mudança de variáveis $y/x = z$ transforma (**??**) numa equação de Bernoulli.

Soluções:

a) Multiplicando a equação por x obtemos $y\, y^prime + (xy)^2 = x$, ou ainda

$$y' + x^2\, y = x\, y^{-1},$$

que não é uma equação de Riccati.

b) Seja z a variável dependente definida pela equação $y^2 = xz$.

Então (derivando implicitamente $y^2 = xz$ com respeito a x): $2yy' = z + x\, z'$.

Substituindo na equação (**??**), e simplificando, obtemos a equação (para a nova variável z):

$$z' + \left(\frac{1}{x} + 2x\right)\, z = \frac{2}{x}, \tag{2}$$

que é uma equação diferencial linear, de primeira ordem, não homogênea, como queríamos mostrar.

c) Seja z a variável dependente definida pela equação $z = \dfrac{y}{x}$.

Então $y = zx$, $\quad y' = z + xz'$, que substituídos na equação original resultam em (aça todos os detalhes)

$$z' + \left(\frac{1}{x} + x^2\right) z = \frac{1}{x}\, z^{-1} \tag{3}$$

que é uma equação de Bernoulli (na variável z), como queríamos demonstrar.

Comentário:

Você pode verificar que (**??**) é uma equacão diferencial de Bernoulli, na variável y; mais fácil (aparentemente) do que (**??**) ou (**??**). Este exercício parece que complica as coisas.

Entretanto, observe que o exercício não pede para resolver as equações obtidas após as substituicões. Além disso, acontece que muitas vezes encontramos equações diferenciais de primeira ordem, ou mesmo de ordens superiores, que podem ser transformadas em (ou reduzidas a) equações diferenciais mais simples por meio de substituições convenientes. Desta maneira, após efetuar a substituição, resolvemos a equação transformada, e depois obtemos as soluções da equação original.

É, no mínimo, mais um recurso que podemos tentar.

Exercício 3

Resolva as equações:

a) $y' = \dfrac{y}{x} + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

b) $y' = sen\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$.

Soluções:

Os dois itens são relativos a equações homogêneas. Nos dois casos, faremos as mudanças

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx, \quad y' = v + xv'.$$

a) $y' = \dfrac{y}{x} + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$

Fazendo as substituições indicadas, obtemos

$$\begin{aligned} v + xv' &= v + 2\,v^2 \\ xv' &= 2\,v^2 \\ \frac{dv}{2v^2} &= \frac{dx}{x} \\ -\frac{1}{2}\,\frac{1}{v} = ln\,c|x| & \\ c\,|x|e^{x/y} &= 1. \end{aligned}$$

Portanto as soluções são definidas implicitamente pela equação

$$cxe^{x/y} = 1.$$

b) $y' = sen\left(\dfrac{y}{x}\right) + \dfrac{y}{x}$.

Fazendo as substituições indicadas, obtemos

$$\begin{aligned} v + xv' &= sen\,v + v \\ x\,\frac{dv}{dx} &= sen\,v \\ \frac{dv}{sen\,v} &= \frac{dx}{x} \\ ln(cossec\,v - cotg\,v) &= ln\,c|x| \end{aligned}$$

Portanto as soluções são definidas implicitamente pela equação

$$cossec\,\left(\frac{y}{x}\right) - cotg\,\left(\frac{y}{x}\right) = c\,x.$$

Exercício 4 Selecione,dentre as equações abaixo, as que são equações diferenciais exatas e resolva-as:

i) $(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$

ii) $y(x - 2y)\,dx - x^2\,dy = 0$

iii) $(x^2 + y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

iv) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\,dy = 0$

v) $(1 + e^{2\theta}\,d\rho + 2\rho\,e^{2\theta})\,d\theta = 0$

vi) $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2}) + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$

Solução:

i) $(x^2 - y)\,dx - x\,dy = 0$

Sejam $M = x^2 - y$ e $N = -x$.

Então $M_y = -1 = N_x$ e a equação é exata.

$\exists \varphi(x,y)$ tal que

$\varphi_x = x^2 - y,\quad$ e

$\varphi_y = -x. \qquad\qquad (*)$

Temos:

$$\begin{aligned}\varphi_x = x^2 - y \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = \frac{x^3}{3} - xy + h(y)\\ &\Longrightarrow \quad \varphi_y = -x + h'(y) \qquad\qquad (**)\end{aligned}$$

Igualando (*) a (**): $\qquad -x + h'(y) = -x$

$\therefore \quad h'(y) = 0$

e portanto $h(y) = c_1$

Assim $\varphi(x,y) = \dfrac{x^3}{3} - xy + c_1$

e as soluções da equação são as funções definidas pela equação $\dfrac{x^3}{3} - xy + c_1 = c_2$

ou ainda, sendo $c = c_2 - c_1$:

$$\frac{x^3}{3} - xy = c$$

Obs: Nos próximos itens, seguiremos o costume abusivo de chamar de *solução geral* a fórmula que define as soluções implicitamente.

Obs: Solicitamos sua atenção para as correções nas equações dos itens (v) e (vi)

---

ii) $y(x-2y)\ dx - x^2\ dy = 0$

$M = y(x-2y) \qquad \Longrightarrow \qquad M_y = x - 4y$

$N = -x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad N_x = -2x$

A equação *não* é exata.

---

iii) $(x^2 + y^2)\ dx + 2xy\ dy = 0$

$M = x^2 + y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad M_y = 2y$

$N = 2xy \qquad \Longrightarrow \qquad N_x = 2y$

A equação *é* exata.

$\exists \varphi(x, y)$ tal que

$\varphi_x = x^2 + y^2, \qquad\qquad (*) \quad$ e

$\varphi_y = 2xy.$

$$\begin{aligned} \varphi_y = 2xy \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x, y) = xy^2 + h(x) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_x = y^2 + h'(x) \qquad\qquad (**) \end{aligned}$$

Igualando (*) a (**): $\qquad y^2 + h'(x) = x^2 + y^2$

e portanto $h(x) = \dfrac{x^3}{3}$

Assim $\varphi(x, y) = xy^2 + \dfrac{x^3}{3}$

e a solução geral da equação é

$$xy^2 + \frac{x^3}{3} = c$$

---

iv) $dx - \sqrt{a^2 - x^2}\, dy = 0$

$M = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad M_y = 0$

$N = -\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad N_x = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

A equação *não* é exata.

---

v) $(1 + e^{2\theta})\, d\rho + 2\rho\, e^{2\theta}\, d\theta = 0$

$M = 1 + e^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad M_\theta = 2e^{2\theta}$

$N = 2\rho\, e^{2\theta} \qquad \Longrightarrow \qquad N_\rho = 2e^{2\theta}$

A equação *é* exata.

$\exists\ \varphi(\rho, \theta)$ tal que

$\varphi_\rho = 1 + e^{2\theta}, \qquad\qquad (*)$

$\varphi_\theta = 2\rho\, e^{2\theta}$.

$$\begin{aligned} \varphi_\theta = 2\rho\, e^{2\theta} \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(\rho,\theta) = \rho\, e^{2\theta} + h(\rho) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_\rho = e^{2\theta} + h'(\rho) \qquad (**) \end{aligned}$$

Igualando (*) a (**): $\quad h'(\rho) = 1$

e portanto $h(\rho) = \rho$

Assim $\varphi(\rho,\theta) = e^{2\theta} + \rho$

e a solução geral da equação é

$$e^{2\theta} + \rho = c$$

---

vi) $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\, dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\, dy = 0$

$M = 2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1 \quad \Longrightarrow \quad M_y = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y} + 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$

$N = x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y \quad \Longrightarrow \quad N_x = 2xe^{x^2y} + 2x^3ye^{x^2y} + 2ye^{xy^2} + 2xy^3e^{xy^2}$

A equação *é* exata.

$\exists\ \varphi(x,y)$ tal que

$\varphi_x = 2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1, \qquad (*)$

$\varphi_y = x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y.$

$$\begin{aligned} \varphi_y = x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = e^{x^2y} + e^{xy^2} - y^2 + h(x) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_x = 2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + h'(x) \qquad (**) \end{aligned}$$

Igualando (*) a (**): $\quad 2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + h'(x) = 2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1$

de onde $h'(x) = 1$, e então $h(x) = x$

Assim $\varphi(x,y) = e^{x^2y} + e^{xy^2} - y^2 + x$

e a solução geral da equação é

$$e^{x^2y} + e^{xy^2} - y^2 + x = c$$

Exercício 5 Uma equação diferencial linear de ordem n,

$$a_n(t)\, y^{(n)} + a_{n-1}(t)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)\, y' + a_0(t) y = g(t)$$

é *normal em um intervalo* I se $a_n(t)$, o coeficiente da derivada de maior ordem na equação, for *diferente de zero em todos os pontos do intervalo* I.

Observe como, até aqui, foram dadas informações que, embora extremamente relevantes para o problema, ainda não solicitaram nenhuma ação de nosso parte. Devemos lê-las com atenção, e usá-las quando, e se forem necessárias.

Identifique os intervalos onde cada uma das equações abaixo é normal:

a) $y'' + (t^2 - 1)\, y' + y = 0$

b) $[t\, D^2 + (t^2 - 1)\, D + t]\, y = e^t$

c) $[t(t-3)\, D^2 + t^2]\, y = 0$

d) $[2D^2 - 4D + 5]\, y = 0$

Soluções:

a) O coeficiente da derivada de maior ordem na equação $y'' + (t^2 - 1)\, y' + y = 0$ é a função constante UM, que não se anula em nenhum ponto. Logo o equação é normal em $\mathbb{R}$.

b) A forma canônica da equação $[t\, D^2 + (t^2 - 1)\, D + t]\, y = e^t$ é $t\, y'' + (t^2 - 1)\, y' + t\, y = e^t$.
O coeficiente da derivada de maior ordem na equação $y'' + (t^2 - 1)\, y' + t\, y = e^t$ é a função $a_2(t) = t$, a qual se anula em $t_0 = 0$.
Portanto a equação é normal em qualquer intervalo que não contém o ponto $t_0 = 0$.

c) A forma canônica da equação $[t(t-3)\, D^2 + t^2]\, y = 0$ é $t(t-3)\, y'' + t^2\, y = 0$.
O coeficiente da derivada de maior ordem na equação $t(t-3)\, y'' + t^2\, y = 0$ é a função $a_2(t) = t(t-3)$, a qual se anula em $t_0 = 0$ e em $t_1 = 3$.
Portanto a equação é normal em qualquer intervalo que não contenha os pontos $t_0 = 0$ e $t_1 = 3$.

Exemplos: $I = (-\infty; 0)$, $(0; 3)$, $(4; 5)$, $(3; +\infty)$, $(-10, -1)$, etc.

d) O coeficiente da derivada de maior ordem na equação $[2D^2 - 4D + 5]\, y = 0$ é a função constante DOIS, que não se anula em nenhum ponto. Logo o equação é normal em $\mathbb{R}$.

Exercício 6 Um Problema de Valor Inicial PVI ou Problema de Cauchy para uma equação diferencial linear de segunda ordem em um intervalo I é um problema do tipo:

$$\begin{cases} L \cdot y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1; \end{cases}$$

onde $L \equiv a_2(t)\, D^2 + a_1(t)\, D + a_0(t)$; t_0 é um ponto qualquer de I, y_0 e y_1 são números reais quaisquer.

A versão do Teorema de Existência e Unicidade para o Problema de Cauchy acima descrito que utilizaremosafirma que se a equação $L \cdot y = g(t)$ é normal em um intervalo I, então o PVI

$$\begin{cases} L \cdot y = g(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1; \end{cases}$$

tem uma e uma única solução *em I* [1].

> Outra vez, até aqui, foram dadas informações que, embora extremamente relevantes para o problema, ainda não solicitaram nenhuma ação de nosso parte.
> Devemos lê-las com atenção, e usá-las quando, e se forem necessárias.

a) Interprete geometricamente o Teorema de Existência e Unicidade.

b) Diga se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

Se $g(t) \equiv 0; \quad t_0 = 0; \quad y_0 = y_1 = 0$ *então o PVI*

$$L \cdot y = 0; \quad y(t_0) = y_0; \quad y_1(t_0) = y_1$$

então a função identicamente nula é a única solução.

c) Calcule o intervalo onde está definida a solução do PVI

$$\begin{cases} [t(t-3)\,D^2 + t^2\,D - 10]\,y = 0 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 11; \end{cases}$$

Soluções:

a) O T.E.U. (Teorema de Existência e Unicidade), na forma apresentada, nos diz que a equação diferencial de segunda ordem do PVI dado possui uma solução definida em I; i.é, uma função

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}; \qquad t \mapsto \varphi(t)$$

tal que:

i) $\varphi(t_0) = y_0$ (a solução passa pelo ponto (t_0, y_0)), e

ii) $\varphi'(t_0) = y_1$ (a inclinação da reta tangente ao gráfico de φ no ponto (t_0, y_0) é igual a y_1.)

Mais ainda: Só existe uma funcão, definida em todo I satisfazendo os itens i) e ii).

[1] Dizendo de outro modo: O PVI tem uma, e uma só solução em cada intervalo onde a equacão é normal.

b) A funcão identicamente nula ($\theta(t) = 0 \quad$ para todo $t \in I$) certamente satisfaz $[a_2(t)\, D^2 + a_1(t)\, D + a_0(t)] \cdot \theta(t) = 0$.

Além disso, $\theta(0) = 0 \quad$ e $\quad \theta'(0) = 0$.

O T.E.U. garante então que θ e a única solução do PVI apresentado. Portanto a afirmação é VERDADEIRA.

c) A equação $[t(t-3)\, D^2 + t^2\, D - 10]\, y = 0$ é normal em qualquer intervalo que não contenha $t_0 = 0$ ou $t_1 = 3$.

O ponto $t* = 1$ pertence ao intervalo $(0;3)$.

Então (T.E.U.) “a” solução do PVI proposto existe e está definida no intervalo $(0,3)$.

Exercício 7

Calcule um fator de integração, função de uma das variáveis x ou y, e calcule suas soluções:

i) $y\ dx - x\ dy = 0$,
ii) $y\ dx + (2x - y^2)\ dy = 0$
iii) $y' + a(x)y = b(x)$

Solução:

i) $y\ dx - x\ dy = 0$

$M = y \qquad \Longrightarrow \qquad M_y = 1$

$N = -x \qquad \Longrightarrow \qquad N_x = -1$

A equação *não é* exata.

Entretanto observamos que $\frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x}$, que é função somente de x.

Então $e^{\int -2/x\ dx} = \frac{1}{x^2}$ é um fator de integração.

Multiplicando a equação original por $\frac{1}{x^2}$ obtemos

$$\frac{y}{x^2}\ dx - \frac{1}{x}\ dy = 0$$

que *é* uma equação exata (verifique!)

logo $\exists\ \varphi(x,y)$ tal que

$\varphi_x = \dfrac{y}{x^2}, \qquad\qquad (*)$

$\varphi_y = -\dfrac{1}{x}$.

$$\begin{aligned}\varphi_y = -\frac{1}{x} \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = -\frac{y}{x} + h(x) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_x = \frac{y}{x^2} + h'(x) \qquad\qquad (**)\end{aligned}$$

Igualando (*) a (**) concluímos que e $h'(x) = 0$, e então $h(x) = c$

Assim $\varphi(x,y) = \dfrac{y}{x^2} + c_1$

e a solução geral da equação é

$$\frac{y}{x^2} = c$$

---

ii) $y\ dx + (2x - y^2)\ dy = 0$

$M = y \qquad \Longrightarrow \qquad M_y = 1$

$N = 2x - y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad N_x = 2$

A equação *não é* exata.

Entretanto observamos que $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{1}{y}$, que é função somente de y.

Então $e^{\int 1/y\ dy} = y$ é um fator de integração.

Multiplicando a equação original por y obtemos

$$y^2\ dx + (2xy - y^3)\ dy = 0$$

que *é* uma equação exata .

logo $\exists\ \varphi(x,y)$ tal que

$\varphi_x = y^2$,

$\varphi_y = (2xy - y^3)$. $\qquad\qquad$ (*)

$$\begin{aligned}\varphi_x = y^2 \quad &\Longrightarrow \quad \varphi(x,y) = xy^2 + h(y) \\ &\Longrightarrow \quad \varphi_y = 2xy + h'(y) \qquad\qquad (**)\end{aligned}$$

Igualando (*) a (**) concluímos que e $h'(y) = -y^3$, e então $h(y) = -\dfrac{y^4}{4}$

Assim $\varphi(x,y) = xy^2 - \dfrac{y^4}{4}$

e a solução geral da equação é

$$xy^2 - \frac{y^4}{4} = c$$

iii) $y' + a(x)y = b(x)$

Observe que a equação dada é uma equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem.

Podemos escrevê-la sob a forma

$$\underbrace{[b(x) - a(x)y\ ]}_{M}\ dx + \underbrace{-1}_{N}\ dy = 0,$$

que *não* é uma equação exata.

No entanto $\dfrac{M_y - N_x}{N} = a(x)$, função somente da variável x.

segue-se que $e^{\int a(x)\ dx}$ é um fator de integração.

o restante da solução é como está exposto na Aula 10 (com $p(x)$ e $q(x)$ substituídos por $a(x)$ e $b(x)$ respectivamente [2])

ATENCÃO, ATENCÃO!!!! Dada $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$, lembre que:

Se $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ é função só de x então $e^{\int (M_y - N_x)/N\,dx}$ é fator integrante que só depende de x.

Se $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ é função só de y então $e^{\int (N_x - M_y)/M\,dy}$ é fator integrante que só depende de y.

É muito importante respeitar a ordem das parcelas no numerador $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ para que $e^{\int (M_y - N_x)/N\,dx}$ seja função só de x.

Também é fundamental não esquecer de que o fator integrante é $e^{\int (M_y - N_x)/N\,dx}$ e não somente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$.

Valem observações análogas para fatores integrantes que só dependem de y, isto é:

É preciso respeitar a ordem das parcelas no numerador $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ para que $e^{\int (N_x - M_y)/M\,dy}$ seja função só de y.

Também é fundamental não esquecer de que o fator integrante é $e^{\int (N_x - M_y)/M\,dy}$ e não apenas $\dfrac{N_x - M_y}{M}$.

[2] Confira nas páginas 116 e 117 do módulo I