

## AP2- CÁLCULO II-2011/2 Gabarito

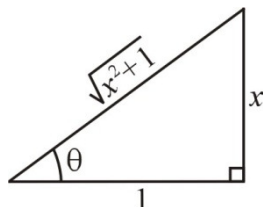
### 1ª Questão (2,5 pontos).

(a) (1,5 ponto) Utilizando o método de substituição trigonométrica, calcule  $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

(b) (1,0 ponto) Utilizando o método de frações parciais, calcule  $\int \frac{5}{2x^2-3x-2} dx$ .

#### Solução da 1ª Questão

(a) Para utilizar a substituição trigonométrica considere o triângulo associado



Fazendo  $x = \tan \theta$ ,  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ . Então  $dx = \sec^2 \theta d\theta$  e  $\sec \theta = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \sec^2 \theta = (x^2+1)$ . Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} = \int \cos^2 \theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + C \\ &= \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} 2 \sin \theta \cos \theta + C = \frac{1}{2} \arctg x + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + C \\ &= \frac{1}{2} \arctg x + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. \end{aligned}$$

(b) Note que  $\int \frac{5}{2x^2-3x-2} dx = \int \frac{5}{(x-2)(2x+1)} dx$

Por outro lado a função  $f(x) = \frac{5}{(x-2)(2x+1)}$  é uma função racional própria. O denominador tem dois fatores lineares distintos logo a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{5}{(x-2)(2x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{2x+1} \quad (*)$$

Para determinar os valores de  $A$  e  $B$  multiplicamos ambos os lados da expressão (\*) pelo produto dos denominadores  $(x-2)(2x+1)$ , obtendo

$$5 = A(2x+1) + B(x-2) \quad (**)$$

$$5 = 2Ax + A + Bx - 2B$$

$$5 = (2A+B)x + (A-2B)$$

$$(1) \begin{cases} 2A+B=0 \\ A-2B=5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema (1) resulta

$$B = -2 \quad \text{e} \quad A = 1 \quad (2)$$

Substituindo em (\*) os valores achados em (2) temos

$$\frac{5}{(x-2)(2x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{-2}{2x+1}$$

Logo

$$\int \frac{5}{(x-2)(2x+1)} dz = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{2}{2x+1} dx = \ln |x-2| - \ln |2x+1| + C = \ln \left| \frac{x-2}{2x+1} \right| + C.$$

## 2ª Questão (2,5 ponto)

(a) (1,5 ponto) Calcule a integral imprópria  $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x} dx$

(b) (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+e^{2x}}$  utilizando algum dos critérios apresentados na aula.

### Solução da 2ª Questão

(a)

Observe que  $f(x) = \frac{1}{x \ln^3 x}$  é contínua no intervalo  $[e, +\infty)$  assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não-limitado  $[e, +\infty)$ .

Faça a substituição  $u = \ln x$  então  $du = \frac{dx}{x}$ . Logo se  $x = e \Rightarrow u = \ln e = 1$  e se  $x \rightarrow +\infty \Rightarrow u \rightarrow +\infty$

Assim

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^3} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{du}{u^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t u^{-3} du = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ \frac{u^{-2}}{-2} \right]_1^t = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[ -\frac{1}{2t^2} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2}.$$

(b)

Note que para  $x \geq 1$  resulta que  $x + e^{2x} > e^{2x}$  logo  $0 < \frac{1}{x+e^{2x}} < \frac{1}{e^{2x}}$  (3)

Por outro lado  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{2x}} dx = \int_1^{+\infty} e^{-2x} dx$  e esta última integral pelos exemplos referenciais sabemos que

converge pois  $r = 2$ . Logo de (3) e o critério de comparação resulta que  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+e^{2x}}$  converge.

**3ª Questão (2,5 pontos)** Seja  $\mathcal{R}$  a região limitada pelas curvas  $y = \cos x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  e  $y = 0$ .

(a) (0,5 ponto) Esboce o gráfico da região  $\mathcal{R}$

(b) Em cada parte, estabeleça, **mas não calcule**, o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de  $\mathcal{R}$  em torno do eixo  $Oy$ , usando o método:

i) das cascas cilíndricas

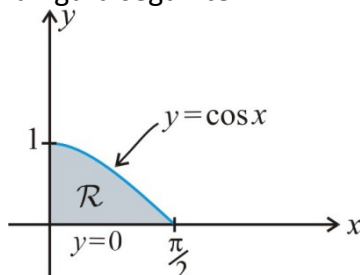
(1,0 ponto)

ii) dos discos circulares

(1,0 ponto)

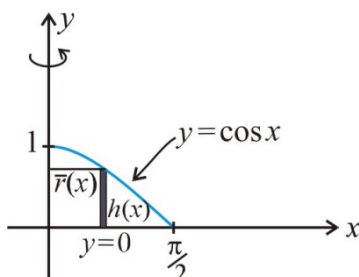
**Solução da 3ª Questão**

(a) O gráfico da região é mostrado na figura seguinte



(b)

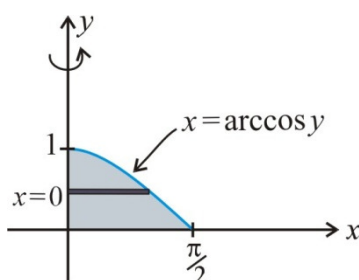
(i) Método das cascas cilíndricas



Identificamos a função altura da casca típica  $h(x)$  e o raio médio da casca típica  $\bar{r}(x)$  onde  $h(x) = \cos x$  e  $\bar{r}(x) = x$  para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ . Note que  $0 \leq \cos x$  para  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , assim  $h(x) \geq 0$  e  $\bar{r}(x) \geq 0$  nesse intervalo. Neste caso a fórmula a ser usada é  $V = 2\pi \int_a^b \bar{r}(x)h(x)dx$ . Logo

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$$

(ii) Método dos discos circulares



Identificamos o raio do retângulo típico  $R(y)$  onde  $R(y) = \arccos y$  para  $0 \leq y \leq 1$ . Note que  $0 \leq \arccos y$  para  $0 \leq y \leq 1$ , assim  $R(y) \geq 0$  nesse intervalo. Neste caso a fórmula a ser usada é

$$V = \pi \int_c^d [R(y)]^2 dy. \quad \text{Portanto} \quad V = \pi \int_0^1 [\arccos y]^2 dy.$$

#### 4ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,0 ponto) Encontre a solução particular de  $xy dx + e^{-x^2} (y^2 - 1) dy = 0$  que satisfaz a condição inicial de  $y(0) = 1$

**(b) (1,5 ponto)** Determine a solução geral de  $y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$

**Solução da 4ª Questão**

**(a)**

Note que  $y = 0$  é uma solução da equação diferencial, porém não satisfaz a condição inicial. Podemos supor então que  $y \neq 0$ . Logo  $e^{-x^2} (y^2 - 1) dy = -xy dx$ . Podemos separar as variáveis na forma:

$$\frac{(y^2 - 1)}{y} dy = -xe^{x^2} dx \Rightarrow \int \left(y - \frac{1}{y}\right) dy = -\frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} - \ln|y| = -\frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

Da condição inicial  $y(0) = 1$ , obtém-se  $\frac{1}{2} - 0 = -\frac{1}{2} + C$  logo  $C = 1$ . Por tanto a solução tem a forma implícita  $y^2 - 2\ln|y| = -e^{x^2} + 2$ . Ou  $y^2 - \ln|y|^2 + e^{x^2} = 2$ .

**(b)** Observe que  $y' - xy = e^{\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$  é uma equação linear de primeira ordem não-homogênea da forma  $y' + p(x)y = q(x)$ . Neste caso  $p(x) = -x$  e  $q(x) = e^{\frac{x^2}{2}} (1 - x^2)$ .

Usando a fórmula da solução geral

$$y = e^{\left(-\int p(x)dx\right)} \left[ \int e^{\left(\int p(x)dx\right)} q(x) dx + C \right], \text{ onde } C \text{ é uma constante arbitrária, resulta}$$

$$y = e^{\left(-\int -x dx\right)} \left[ \int e^{\left(\int -x dx\right)} e^{\frac{x^2}{2}} (1 - x^2) dx + C \right] \text{ ou seja } y = e^{\frac{x^2}{2}} \left[ \int \underbrace{e^{-\frac{x^2}{2}} e^{\frac{x^2}{2}}}_1 (1 - x^2) dx + C \right]$$

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \left[ \int (1 - x^2) dx + C \right] = e^{\frac{x^2}{2}} \left[ x - \frac{x^3}{3} + C \right]$$

Donde finalmente temos  $y = e^{\frac{x^2}{2}} \left( x - \frac{x^3}{3} \right) + Ce^{\frac{x^2}{2}}$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária.