Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

AP2- CÁLCULO II-2010/2 GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos). Calcule

(a) (1,5 ponto) $\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$ **(b) (1,5 ponto)** $\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+9}$

Solução

(a) Observe que a integral $\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx$ **foi resolvida no Exercício 1 (b) do EP08-2010-2**

$$\int \frac{\text{sen}^3 x}{\cos^4 x}\, dx = \int \text{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx$$

$$\int \text{sen}^3 x \cos^{-4} x\, dx = \int \text{sen}^2 x \cos^{-4} x \;\text{sen}\, x\, dx = -\int (1-\underbrace{\cos^2 x}_{u^2})\ \underbrace{\cos^{-4} x}_{u^{-4}}\ \underbrace{(-\text{sen}\, x)\, dx}_{du}$$

$$= -\int (1-u^2)\ u^{-4}\, du = \int (-u^{-4}+u^{-2})\, du$$

$$= -\frac{u^{-3}}{-3} + \frac{u^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{3u^3} - \frac{1}{u} + C$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C$$

(b) $\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+9}$ **Integral análoga ao exercício 1 (c) do Apêndice 7 (Semana 11)**

$$\int_{-\infty}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{3} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{t\to-\infty} [\frac{1}{3}\text{arctg}\,\frac{x}{3}]_t^3 = \lim_{t\to-\infty} [\frac{1}{3}\text{arctg}1 - \frac{1}{3}\text{arctg}\,\frac{t}{3}]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{\pi}{4}\right] - \frac{1}{3}\underbrace{\lim_{t\to-\infty}[\text{arctg}\,\frac{t}{3}]}_{-\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left[-\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{4}$$

Logo a integral dada converge a $\frac{\pi}{4}$.

2ª Questão (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral usando um dos critérios apresentados na aula. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5}{2+e^x}\,dx$.

Solução

Observe que $f(x)=\dfrac{1}{e^x}>0$ e $g(x)=\dfrac{5}{2+e^x}>0$

Podemos usar o critério do quociente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{e^x}}{\dfrac{5}{2+e^x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2+e^x}{5e^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{5e^x}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}.$$ Como $L=\dfrac{1}{5}$, pelo teste de comparação no limite $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{5}{2+e^x}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x}dx$ comportam-se da mesma maneira.

Por outro lado $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{e^x}dx=\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$ e esta última integral pelos exemplos referenciais (ou calculando-a diretamente) sabemos que converge, logo pelo critério do limite do quociente podemos afirmar que $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{5}{2+e^x}dx$ é convergente.

3ª Questão (3,5 pontos)

Seja R a região limitada pela curva $y=\operatorname{sen} x$, $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$ e o eixo x.

(a) Esboce o gráfico da região R **(0,5 ponto)**

(b) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução de R

(i) em torno do eixo Oy. **(1,5 ponto)**

(ii) em torno do eixo Ox. **(1,5 ponto)**

Solução

Note-se que este exercício é análogo ao exercício 2 do EP12-2010-2

(a) Na figura 1 mostramos um esboço da região

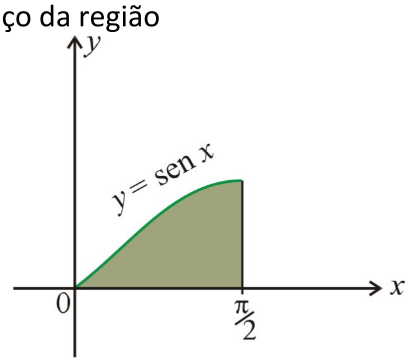

Figura 1

(b) (i) em torno do eixo Oy.

Na figura 2 mostramos um retângulo típico para este caso

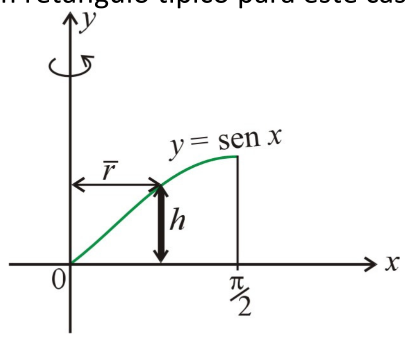

Figura 2

Assim temos usando o método das cascas cilíndricas que

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \bar{r}(x)h(x)dx$$

Isto é

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \underbrace{x}_{u} \underbrace{\operatorname{sen} x\, dx}_{dv} = \underbrace{2\pi \underbrace{x}_{u} \underbrace{(-\cos x)}_{v}\Big]_0^{\pi/2}}_{0} - 2\pi \int_0^{\pi/2} \underbrace{-\cos x}_{v}\, \underbrace{dx}_{du}$$

$$V = 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\pi \operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} = 2\pi$$ unidades de volume.

(ii) em torno do eixo Ox .

Na figura 3 mostramos um retângulo típico neste caso.

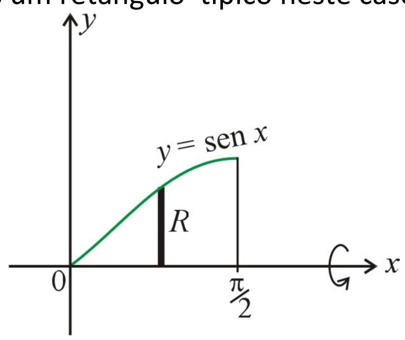

Figura 3

Usando o método dos discos temos que

$$V = \left(\pi \int_0^{\pi/2} \left(R(x)\right)^2 dx \right)$$

Isto é

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} \left(R(x)\right)^2 dx = \pi \int_0^{\pi/2} \left(sen^2 x\right) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \cos 2x\right) dx$$

$$V = \frac{\pi}{2} x\Big]_0^{\pi/2} - \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} \left(\cos 2x\right) 2dx = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{4}(sen\, 2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}$$ unidades de volume.

4ª Questão (2,5pontos)

a) **(1,3 ponto)** Calcule o comprimento da curva $y=\frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ de $x=0$ até $x=3$.

b) **(1,2 ponto)** Calcule a função derivada da seguinte função vetorial

$$\beta(t)=(e^{t^2}\,t^e,\ e^{t\ln(t^2+1)}).$$

Solução

(a) Vamos parametrizar a curva dada. Fazendo $x=t$ tem-se $y=\frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2}$, temos que

$\alpha(t)=(x(t),y(t))=(t,\frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2})$ com $0\le t\le 3$ é uma parametrização para a curva dada.

Logo

$\alpha'(t)=(1,\frac{1}{3}\frac{3}{2}(t^2+2)^{1/2}(2t))=(1,t(t^2+2)^{1/2})$ e

$|\alpha'(t)|=\sqrt{1+t^2(t^2+2)}=\sqrt{1+2t^2+t^4}=\sqrt{(1+t^2)^2}=|1+t^2|=1+t^2$

Assim

$$\int_0^3|\alpha'(t)|dt=\int_0^3(1+t^2)dt=t+\frac{t^3}{3}\bigg]_0^3=3+3^2=12.$$

(b) $\beta(t)=(e^{t^2}\,t^e,\ e^{t\ln(t^2+1)})$

$$\beta'(t)=(e^{t^2}\,(t^e)'+t^e(e^{t^2})',\ e^{t\ln(t^2+1)}(t\ln(t^2+1))')$$

$$\beta'(t)=(e^{t^2}\,(et^{e-1})+t^e(e^{t^2}2t),\ e^{t\ln(t^2+1)}[t\,(\ln(t^2+1))'+\ln(t^2+1)(t)'])$$

Portanto

$$\beta'(t)=(e^{t^2+1}\,t^{e-1}+2t^{e+1}e^{t^2},\ e^{t\ln(t^2+1)}\left[\frac{2t^2}{t^2+1}+\ln(t^2+1)\right]).$$

.