Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Cálculo II – AD1 (2011/1) Gabarito Detalhado

1ª Questão (2,5 pontos) O gráfico de uma função f consiste de um semicírculo e dois segmentos de reta , como se vê na figura 1.1 a seguir . Seja $F(x) = \int_1^x f(t)\, dt$

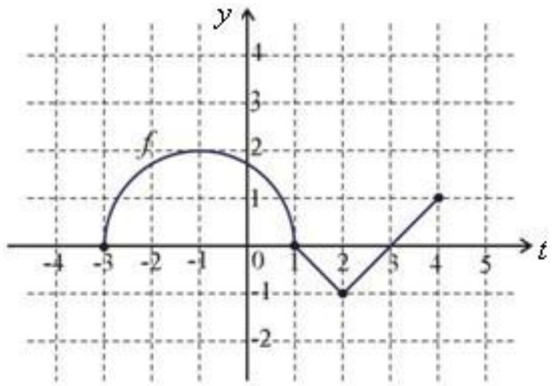

Figura 1.1

(a) Determine $F(1)$, $F(3)$ e $F(-1)$.
(b) Determine todos os valores de x no intervalo aberto $(-3,4)$ em que F tem um máximo relativo.
(c) Escreva uma equação para a reta tangente ao gráfico de F em $x=-1$.
(d) Determine a coordenada x de cada ponto de inflexão do gráfico de F no intervalo aberto $(-3,4)$.
(e) Determine a imagem de F.

Solução:

(a) Note de início que a função $F(x)$ é dada como uma integral de uma outra função $f(t)$.

Cálculo de F(1): por simples substituição, fazendo $x=1$, fica

$$F(1) = \int_1^1 f(t)\, dt\,.$$

Como os extremos de integração são os mesmos (ambos iguais a 1), segue da definição que

$$F(1) = 0\,.$$

<u>Cálculo de F(3):</u> por substituição, fazendo $x = 3$, fica

$$F(3) = \int_1^3 f(t)\,dt\,.$$

Note que no intervalo $[1,3]$ a função $f(t)$ é negativa, portanto pela definição 2.2 do caderno didático resulta que

$\int_1^3 f(t)\,dt$ = - área da região mostrada na figura 1.2 a seguir

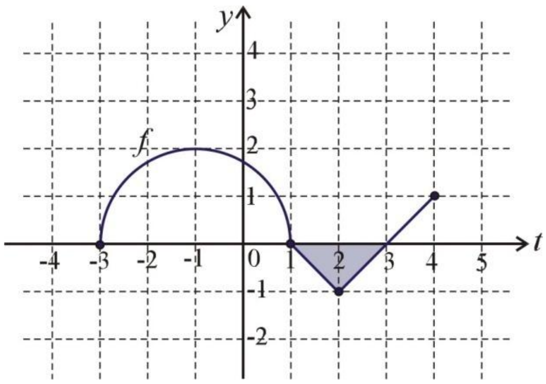

Figura 1.2

Logo

$\int_1^3 f(t)\,dt$ = - área do triângulo de base 2 e altura 1 = $-\dfrac{2.1}{2} = -1$. Assim: $F(3) = -1$.

<u>Cálculo de F(-1):</u> por substituição, fazendo $x = -1$, fica $F(-1) = \int_1^{-1} f(t)\,dt$.

Lembremos que $$\int_1^{-1} f(t)\,dt = -\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \qquad (1)$$

Como no intervalo $[-1,1]$ a função $f(t)$ é positiva, segue pela definição 2.2 do caderno didático que a integral definida $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt =$ área da região mostrada na figura 1.3 a seguir

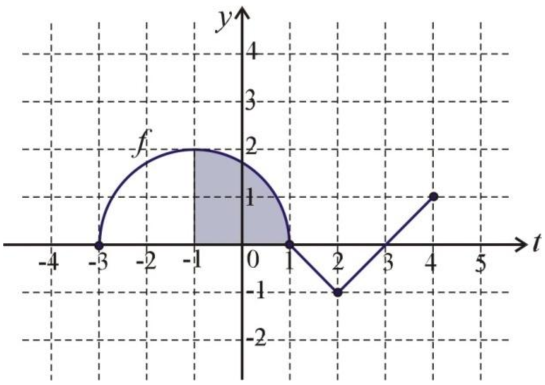

Figura 1.3

Note que o ponto (-1,0) é justamente o centro da semicircunferência de raio 2 que faz parte do gráfico da função $f(t)$ e a região sombreada é exatamente um quarto de círculo de raio 2. Logo

$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ = área de um quarto de círculo de raio 2 = $\frac{1}{4}.\pi.2^2 = \pi$.

Portanto, substituindo este valor em (1), temos que $F(-1) = -\pi$.

(b) Lembremos que, pelo TFC,

$$F'(x) = f(x)$$

e façamos uma análise no sinal de $F'(x)$ para sabermos em que intervalos F é crescente ou decrescente.

Pelo gráfico de $f(t)$, sabemos que

$$f(t) > 0 \text{ em } (-3,1) \text{ e } (3,4) \text{ e } f(t) < 0 \text{ em } (1,3),$$

Ou seja, temos a seguinte tabela:

intervalos	$-3 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 4$
$F'(x) = f(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	↗	↘	↗

Os candidatos a extremos locais no intervalo $(-3,4)$ são os valores de x para os quais $F'(x) = 0$.

Neste caso, temos apenas $x = 1$ e $x = 3$ como candidatos.

Pela tabela acima e o teste da derivada primeira, $x = 1$ é ponto de máximo local e $x = 3$, mínimo local.

Portanto $x = 1$ é o único valor de máximo relativo no intervalo $(-3,4)$.

(c) **<u>Atenção:</u>** o exercício pede a equação da reta tangente ao gráfico da função $F(x)$ e não de $f(x)$. O gráfico de $F(x)$ não é aquele dado no enunciado.

Pelo item (a), sabemos que $F(-1) = -\pi$.

Sabemos do cálculo I que $F'(-1)$ é o valor do coeficiente angular da reta procurada.

Pelo TFC, $F'(-1) = f(-1)$.

Agora, por simples inspeção no gráfico de $f(x)$ na figura 1.1, temos que $f(-1) = 2$, ou seja,

$$F'(-1) = 2 .$$

Assim, a reta procurada deve ter coeficiente angular 2 e passar pelo ponto de coordenadas $(-1,-\pi)$
Usando um pouco de geometria analítica, sabemos então que a equação da reta é obtida via

$$y-(-\pi)=2.(x-(-1))\text{, ou seja}$$

$$\boxed{y=2x-\pi+2}.$$

(d) Devemos analisar a mudança no sinal de $F''(x)$.
Novamente pelo TFC, sabemos que $F'(x)=f(x)$..
Derivando esta última expressão (nos valores de x em que $f(x)$ seja derivável), obtém-se

$$F''(x)=f'(x).$$

Assim, para estudarmos a variação de sinal de $F''(x)$, devemos analisar o sinal de $f'(x)$, o que pode ser feito verificando em que intervalos $f(x)$ é crescente ($f'(x)>0$) ou decrescente ($f'(x)<0$).
Por uma simples inspeção na figura 1.1, temos a seguinte tabela:

intervalo	$-3<x<-1$	$-1<x<1$	$1<x<2$	$2<x<4$
$f(x)$	↗	↘	↘	↗
$F''(x)=f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
O gráfico de F	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

Portanto, o gráfico de F muda de concavidade em $x=-1$ e $x=2$, e já que existe reta tangente nesses pontos, são estas as coordenadas x dos pontos de inflexão de $F(x)$.

(e) Vimos no item (b) que F tem um ponto de máximo local em $x=1$ e um mínimo local em $x=3$, e pelo item (a) sabemos que F assume nestes os valores

$$F(1)=0 \text{ e } F(3)=-1 \qquad (*)$$

Para conhecer a imagem da função $F(x)$, resta saber se estes são os valores (máximo e mínimo) absolutos assumidos pela função $F(x)$ no intervalo $[-3,4]$. Lembre do cálculo I que toda função F contínua definida num intervalo fechado alcança seu máximo e seu mínimo absoluto neste intervalo. Lembre que F é derivável no intervalo $[-3,4]$, logo F é continua no intervalo fechado dado. Devemos assim determinar os valores de $F(x)$ nos extremos do intervalo e compará-los com os já calculados em (*) para saber quais os extremos absolutos da função.

Cálculo de F(-3):

$$F(-3)=\int_1^{-3} f(t)\,dt=-\int_{-3}^{1} f(t)\,dt\,. \qquad (2)$$

Como no intervalo $[-3,1]$ a função $f(t)$ é positiva, segue pela definição 2.2 do caderno didático que a integral definida $\int_{-3}^{1} f(t)\,dt=$ área da região mostrada na figura 1.4 a seguir

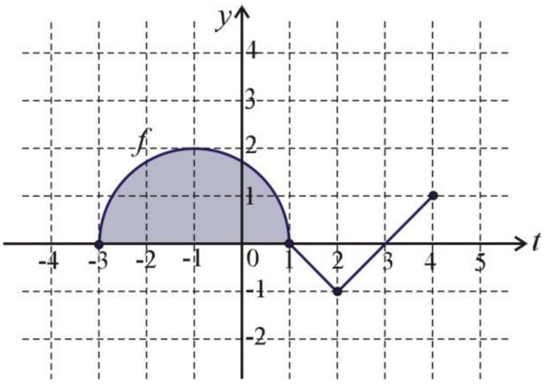

Figura 1.4

ou seja, $\int_{-3}^{1} f(t)\,dt$ =área do semicírculo de raio 2 = $\frac{1}{2}.\pi.2^2 = 2\pi$.

Substituindo este valor em (2) temos, portanto que

$$F(-3) = -2\pi \qquad (**)$$

<u>Cálculo de F(4):</u>

$$F(4) = \int_{1}^{4} f(t)\,dt\,.$$

Agora, pela proposição 2.2 do caderno didático

$$\int_{1}^{4} f(t)\,dt = \underbrace{\int_{1}^{3} f(t)\,dt}_{=-1,\ item(a)} + \int_{3}^{4} f(t)\,dt \qquad \text{(i)}$$

Como no intervalo $[3,4]$ a função $f(t)$ é positiva, segue pela definição 2.2 do caderno didático que a integral definida $\int_{3}^{4} f(t)\,dt =$ área da região mostrada na figura 1.5 a seguir

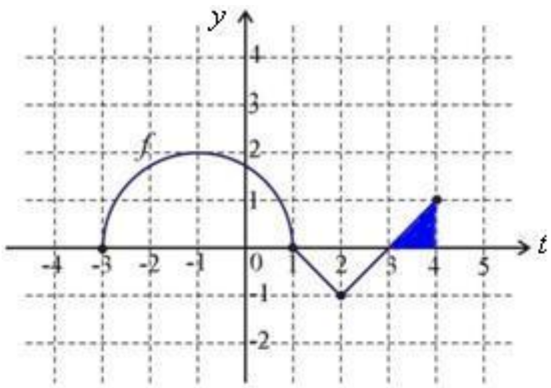

Figura 1.5

Isto é $\int_{3}^{4} f(t)\,dt$ = área do triângulo de base 1 e altura 1 = $\frac{1.1}{2} = \frac{1}{2}$.

Substituindo em (i), tem-se $\int_{1}^{4} f(t)\,dt = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, ou seja,

$$F(4) = -\frac{1}{2} \qquad (***)$$

Atenção: Note na figura 1.6 que a integral definida $\int_1^4 f(t)\,dt$ é a diferença das áreas da região sombreada que esta por cima do eixo x e da região sombreada que esta por baixo do eixo x e observe que neste caso o resultado foi um valor negativo porque a área da região que esta por baixo do eixo x é maior que a área da região que esta por cima do citado eixo.

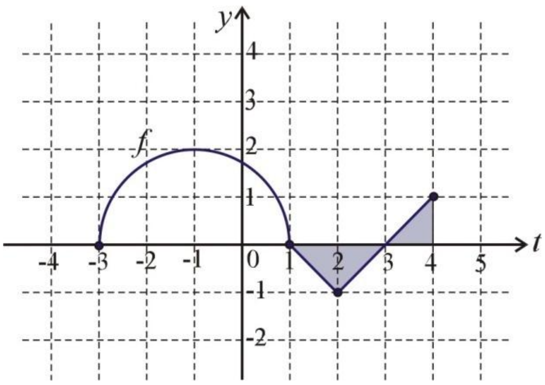

Figura 1.6

Comparando todos os valores em (*) , (**) e (***), vemos que o mínimo deles é $F(-3) = -2\pi$ e o máximo é $F(1) = 0$.
Como F é contínua, segue que sua imagem é $[-2\pi, 0]$.

2ª Questão (2,5 pontos) Seja $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função definida por $F(x) = \int_{-1}^{x} \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt$ tal que:

- $F(0)=1$, $F(1)=2$, $F(\pm\sqrt{3}) = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $F(2) = \frac{9}{5}$.
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Nestas condições **e sem calcular a integral definida** encontre:

(a) As equações das assíntotas horizontais e verticais ao gráfico de F.
(b) Em que intervalos F está crescendo, em quais está decrescendo?
(c) Em que valores de x ocorrem os valores de máximo ou mínimo local em F.
(d) Em que intervalos o gráfico de F é côncavo para baixo? E em que intervalos, é côncavo para cima?
(e) Em que valores de x ocorrem os pontos de inflexão?
(f) Esboce o gráfico de F.

Solução:

(a) Seja $f(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Segue do TFC que $F'(x) = f(x)$.

Como $f(x)$ é continua para todo $x\in\mathbb{R}$, temos que F é derivável para todo $x\in\mathbb{R}$, em particular F é contínua em todo $x\in\mathbb{R}$. Portanto F não possui assíntotas verticais.
Para verificar as assíntotas horizontais, devemos atentar aos limites no infinito. Mas pelos dados do exercício, sabemos que

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 1 = \lim_{x\to+\infty} F(x).$$

Portanto $x=1$ é a única assíntota horizontal.

(b) Como no item (a), $F'(x) = f(x)$ e sabemos que F é crescente nos intervalos em que $F'(x) > 0$ e decrescente naqueles em que $F'(x) < 0$.
Temos portanto que estudar a variação do sinal da função

$$f(x) = \frac{2.(1-x^2)}{(1+x^2)^2}.$$

Como $\frac{2}{(1+x^2)^2} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que $f(x) > 0$ se, e somente se, $1-x^2 > 0$ (respectivamente, $f(x) < 0$, se e somente se, $1-x^2 < 0$).
Agora:

$$1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Com isso, temos a seguinte tabela

Intervalo	$x < -1$	$-1 < x < 1$	$x > 1$
$F'(x) = f(x)$	$-$	$+$	$-$
$F(x)$	↘	↗	↘

Portanto F é crescente no intervalo $(-1,1)$ e decrescente na união dos intervalos $(-\infty,-1)$ e $(1,+\infty)$.

(c) Pela tabela do item (b), segue que $x=-1$ é um ponto de mínimo local e $x=1$, um ponto de máximo local.

(d) Para estudar a concavidade, precisamos analisar a segunda derivada $F''(x)$.

Pelo item (a), $F'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Derivando novamente obtemos:

$$F''(x) = \frac{2.(-2x).(1+x^2)^2 - 2.(1-x^2).2.(1+x^2).2x}{(1+x^2)^4} \Rightarrow F''(x) = \frac{-4x.(3-x^2)}{(1+x^2)^3}.$$

Como $\frac{4}{(1+x^2)^3} > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que

$$F''(x) > 0 \text{ se, e somente se, } -x.(3-x^2) > 0 \qquad (*)$$

Analisemos o sinal de $-x.(3-x^2)$:

intervalo	$x < -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$-x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$3-x^2$	$-$	$+$	$+$	$-$
$-x.(3-x^2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Pelo teste da segunda derivada, usando a tabela acima e a observação (*), temos que o gráfico de F é côncavo para baixo $(F''(x)<0)$ em $(-\infty,-\sqrt{3})$ e $(0,\sqrt{3})$.
O gráfico de F é côncavo para cima $(F''(x)>0)$ em $(-\sqrt{3},0)$ e $(\sqrt{3},+\infty)$.

(e) Os pontos de inflexão são os valores de x em que **se tem alteração do sinal da segunda derivada e existe a reta tangente nesse valor de** x (Observe que se só se tem alteração no sinal da derivada, pode acontecer que este ponto seja um ponto de quina).
Segue da tabela do item (d) que os pontos de inflexão ocorrem em $x=-\sqrt{3}$, $x=0$ e $x=\sqrt{3}$, pois nestes três pontos existe mudança de concavidade e, uma vez que F é derivável em $\mathbb{R}$, então existe a reta tangente de F nesses pontos. Note que, pelos dados do exercício, temos que $F(0)=1$ e $F(\pm\sqrt{3})=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

(f) Precisamos agora juntar todas as peças obtidas nos itens anteriores para criar um esboço fiel do gráfico procurado. Note também que, como $f(-1)$ está bem definida, podemos afirmar, pela definição 2.1 do caderno didático, que $F(-1)=\int_{-1}^{-1}\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}\,dt=0$. Por outro lado, pelos dados fornecidos neste exercício, sabemos também que $F(1)=2.$
O esboço é mostrado na figura 2.1 a seguir

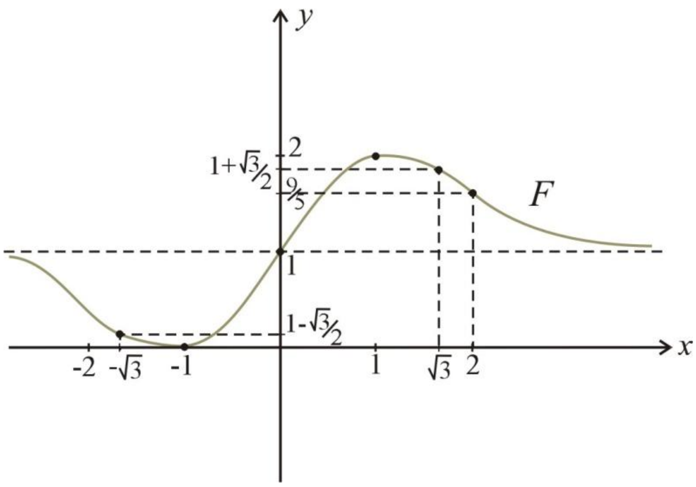

Figura 2.1

3ª Questão (1,5 pontos) Seja $f(x)=2\operatorname{sen}x$, $x\in[-\pi/2,3\pi/4]$

(a) Esboce o gráfico de f

(b) Calcule $\int_{-\pi/2}^{3\pi/4} f(x)\,dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

(c) Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x\in[-\pi/2,0]$
.

Solução:

(a) O gráfico da função f é exibido na figura 3.1 a seguir

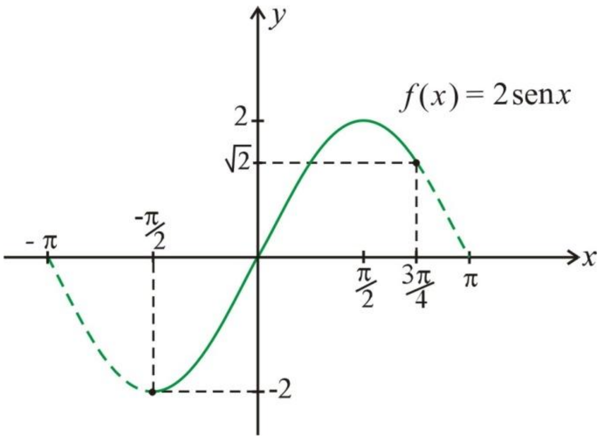

Figura 3.1

(b) A função $F(x) = -2\cos x$ tem como derivada

$$F'(x) = 2sen\,x = f(x)\,.$$

Portanto, pelo TFC, temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-2\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) - \left(-2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2.\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-2.0) = \sqrt{2}$$

Lembre que $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ (*)

Como $f(x) < 0$, para $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ = -(área da região R_1), vide figura 3.2.

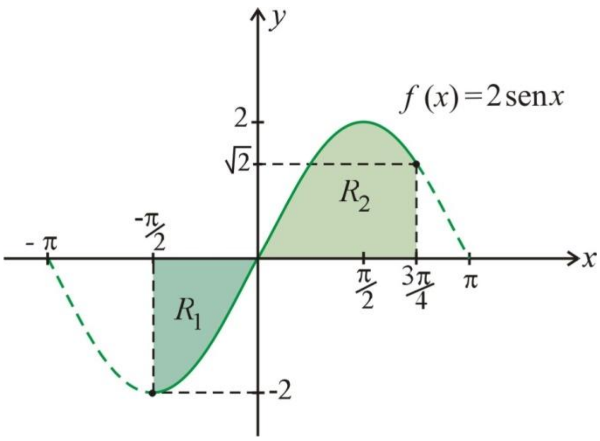

Figura 3.2

Já $f(x) > 0$, para $0 < x < \dfrac{3\pi}{4}$. Neste caso, $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ = área da região R_2.

Substituindo os valores anteriores em (*) temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = -(\text{área da região } R_1) + \text{área da região } R_2 .$$

Portanto, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx$ representa a diferença entre a área da região R_2 e da região R_1.

(c) A região procurada é a região R_1 da figura 3.2 anterior.

Como visto no item anterior, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx$ = -(área da região R_1) (*)

Mas, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} f(x)\,dx = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-2\cos 0) - (-2\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2.1 - (-2.0) = -2$.

Comparando com (*), segue que

área da região R_1 = 2.

4ª Questão (2 pontos) Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre os gráficos de $x^2 = y^3$ e $x - 3y + 4 = 0$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

b) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais definidas em termos de x.

c) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais definidas em termos de y.

d) Encontre a área da região $\mathcal{R}$ (Use a representação mais conveniente).

Solução:

(a) A expressão algébrica $x^2 = y^3$ pode ser reescrita como uma função de x na forma $y = x^{2/3}$ ou como função de y na forma $x = y^{3/2}$ e tem como gráfico a figura 4.1

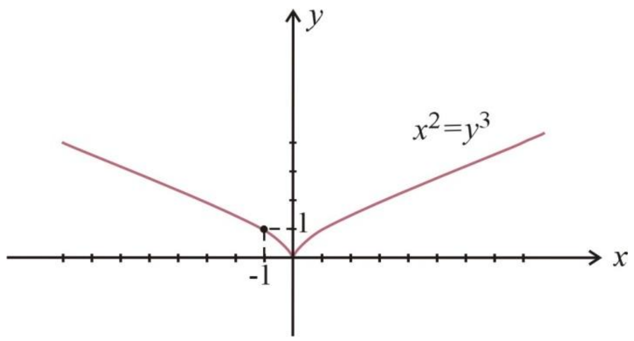

Figura 4.1

A expressão $x-3y+4=0$ pode ser escrita como função de x na forma $y=\dfrac{x+4}{3}$ ou como função de y como $x=3y-4$ e tem o gráfico mostrado na figura 4.2

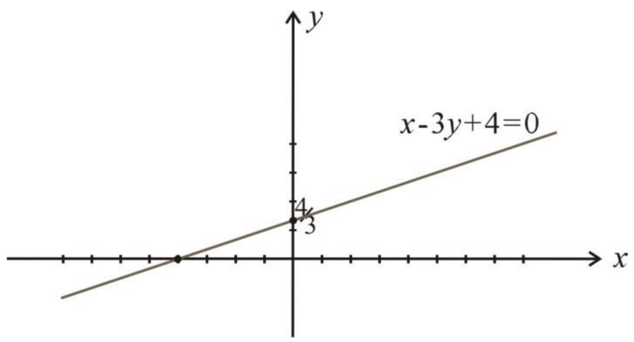

Figura 4.2

Sobrepondo os gráficos, obtemos a figura hachurada mostrada em 4.3

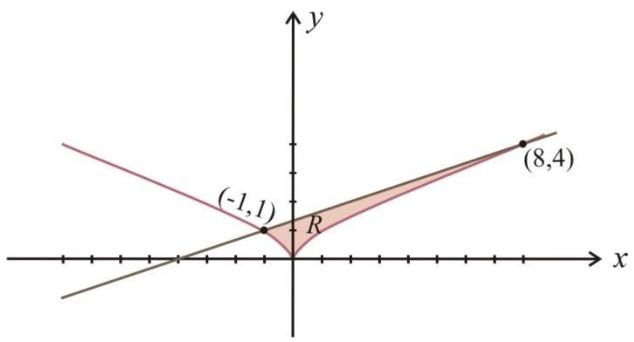

Figura 4.3

Para obter os pontos de interseção, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 = y^3 \\ x-3y+4=0 \end{cases} \qquad (*)$$

Verifica-se facilmente que $x=-1$ e $y=1$ é uma solução.

Isolando y na segunda equação e elevando ao quadrado fica

$$x^2 = 9y^2 - 24y + 16.$$

Substituindo acima a primeira equação de (*) tem-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = 0 \qquad (**)$$

Como já sabemos que $y = 1$ é solução de (**), dividimos o polinômio acima por $y - 1$ e obtém-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = (y-1).(y-4)^2.$$

Portanto, $y = 4$ é a outra solução repetida do polinômio (**) e usando isso em (*) vemos que a abscissa correspondente é $x = 8$, como mostrado na figura 4.3.

(b) Como está visto na figura 4.3, para expressar a área como uma integral em termos de x, não é necessário fazer qualquer tipo de mudança.
Neste caso:

$$A(R) = \int_{-1}^{8} \left(\frac{x+4}{3} - x^{2/3}\right) dx$$

(c) Para representarmos a área em termos de uma integral com relação a y, devemos dividir a região da figura 4.3 em duas, como mostrado na figura 4.4

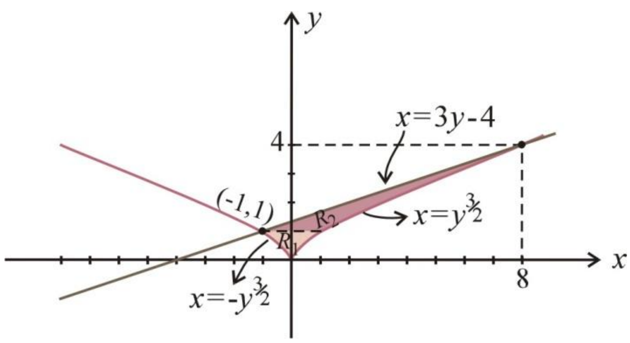

Figura 4.4

Neste caso:

$$A(R) = \underbrace{\int_0^1 \left(y^{3/2} - \left(-y^{3/2}\right) \right) dy}_{A(R_1)} + \underbrace{\int_1^4 \left(y^{3/2} - \left(3y-4\right) \right) dy}_{A(R_2)}$$

(d) Usando a expressão mais simples obtida no item (b), tem-se:

$$A(R) = \int_{-1}^{8} \left(\frac{x+4}{3} - x^{2/3}\right) dx = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{3}{5} x^{5/3} + \frac{4}{3} x \right)\Bigg|_{-1}^{8} = \frac{27}{10}$$

5ª Questão (1,5 pontos) A reta horizontal $y = k$ intercepta a curva $y = 2x - 3x^3$ no primeiro quadrante como mostra a Figura 5.1 . Determine k para que as áreas das duas regiões sombreadas sejam iguais.

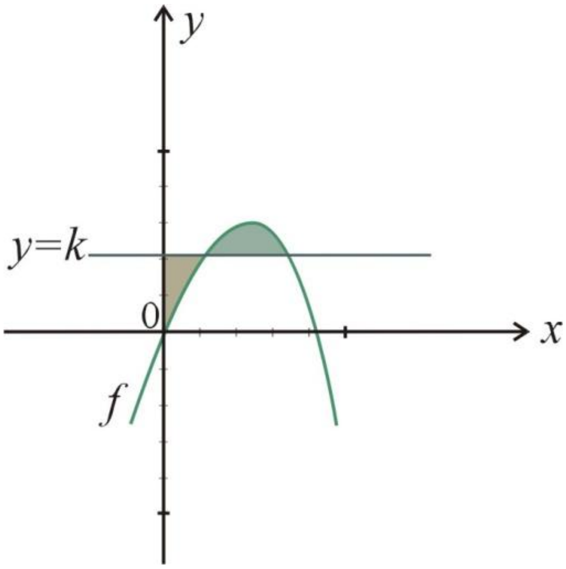

Figura 5.1

Solução:

Precisamos inicialmente descobrir as coordenadas dos pontos de interseção do gráfico com a reta $y = k$.

Considere a figura 5.2 a seguir e sejam $a < b$ as abscissas dos pontos de interseção.

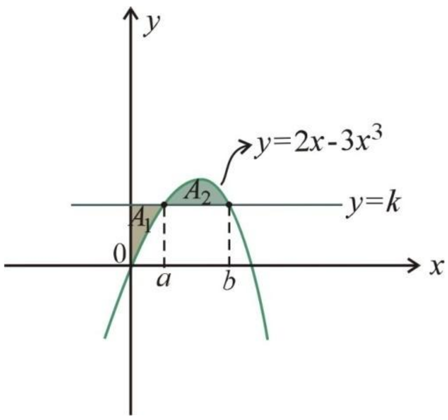

Figura 5.2

Neste caso a e b devem satisfazer a equação $2x - 3x^3 = k$, ou seja,

$$2a - 3a^3 = k = 2b - 3b^3$$
$$a.(2 - 3a^2) = k = b.(2 - 3b^2) \qquad (*)$$

$\boxed{\text{Cálculo de } A_1:}$ observe a figura 5.3 a seguir ilustrando a região A_1.

Temos que:

Área(A_1) = (área do retângulo de base a e altura k) – (área sob o gráfico da função f no intervalo $[0,a]$).Ou seja:

$$A_1 = a.k - \int_0^a (2x - 3x^3)dx$$

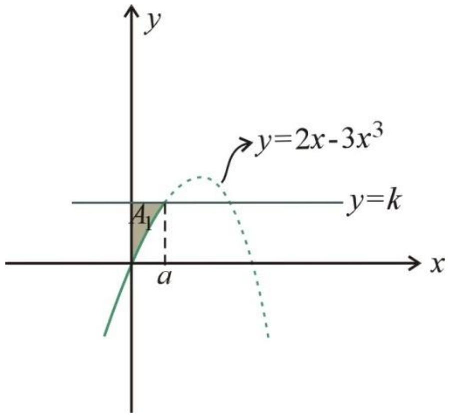

Figura 5.3

Cálculo de A_2 : Observe a figura 5.4 ilustrando a região A_2 .
Tem-se que:

Área(A_2) = (área sob o gráfico da função f no intervalo $[a,b]$) – (área do retângulo de base $(b-a)$ e altura k). Ou seja:

$$A_2 = \int_a^b (2x - 3x^3)dx - k.(b-a)$$

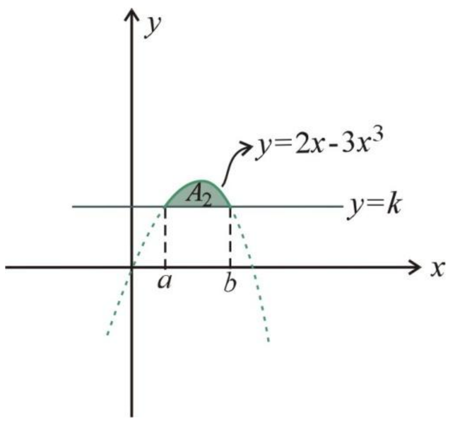

Figura 5.4

Portanto, $A_1 = A_2$ é equivalente a

$$\int_a^b (2x-3x^3)dx - k.(b-a) = a.k - \int_0^a (2x-3x^3)dx$$

$$\Rightarrow \int_0^a (2x-3x^3)dx + \int_a^b (2x-3x^3)dx = a.k + k.(b-a) = a.k + k.b - k.a$$

$$\Rightarrow \int_0^b (2x-3x^3)dx = k.b \qquad (**)$$

Mas $\displaystyle\int_0^b (2x-3x^3)dx = \left(x^2 - \frac{3}{4}x^4 \right)\Bigg|_0^b = b^2 - \frac{3}{4}b^4$.

Substituindo em (**), fica

$$b^2 - \frac{3}{4}b^4 = k.b$$

Usando (*), fica

$$b^2 - \frac{3}{4}b^4 = b.(2-3b^2).b = b^2.(2-3b^2) .$$

Dividindo por b^2 tem-se

$$1 - \frac{3}{4}b^2 = 2 - 3b^2 \text{, ou seja,}$$

$$b = \pm\frac{2}{3} .$$

Note pela figura que estamos interessados na coordenada $b > 0$. Logo $b = \dfrac{2}{3}$.

Substituindo em (*), temos que $\boxed{k = \dfrac{4}{9}}$.