

AP1 - CÁLCULO II - 2013/1 Gabarito

1ª Questão (1,5 pontos) Determine a área da região sombreada

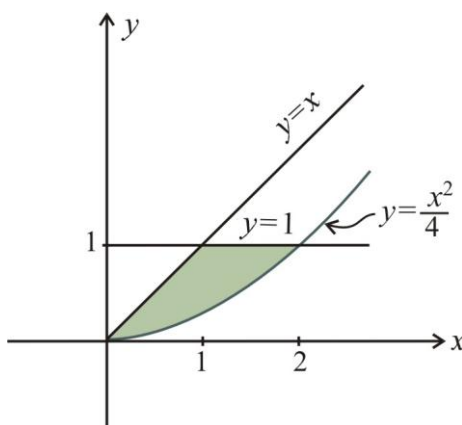


Figura 1.1

Solução

Se você decidiu calcular a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável x , a região $\mathcal{R}$ precisa ser dividida em duas regiões, na Figura 1.2 mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

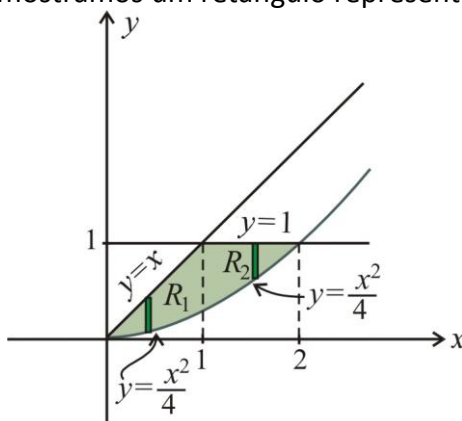


Figura 1.2

Neste caso, a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável x :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_0^1 + \left(x - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_1^2$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \left(2 - \frac{2^3}{12}\right) - \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{5}{12} + \frac{16}{12} - \frac{11}{12} = \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \text{ unidades de área.}$$

Se você decidiu calcular a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável y , a região $\mathcal{R}$ pode ser calculada por apenas uma integral em relação à variável y . Na Figura 1.3 mostramos um retângulo representativo horizontal na região.

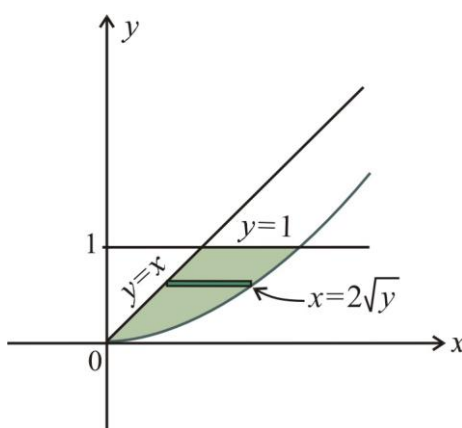


Figura 1.3

Neste caso, a representação da área é feita por uma integral em relação à variável y :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 ((2\sqrt{y}) - y) dy = \left[4 \frac{y^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6} \text{ unidades de área.}$$

2ª Questão (2,0 pontos) Seja $G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt$ onde $x > 0$ e considere $H(x) = x G(x)$.

(a) Calcule $G'(x)$.

(b) Ache $H'(x)$

Solução

(a) Note que o integrando $f(t) = \sin t^2$ é uma função contínua para todo número real t .

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt = \int_{\sqrt{x}}^a \sin t^2 dt + \int_a^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt, \quad a \in \mathbb{R} \text{ qualquer, } x > 0$$

Logo

$$G(x) = - \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt + \int_a^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt$$

Assim, utilizando a 1ª forma do TFC e a regra da cadeia em cada parcela, obtemos

$$G'(x) = -\sin(\sqrt{x})^2 [\sqrt{x}]' + \sin(2\sqrt{x})^2 [2\sqrt{x}]'$$

Ou seja,

$$G'(x) = -\sin(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \sin(4x) \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(4x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(x)$$

$$\text{Isto é, } G'(x) = \frac{\sqrt{x}}{x} [\sin(4x) - \frac{1}{2} \sin(x)], \quad x > 0$$

(b) $H'(x) = x G'(x) + G(x)$

Assim, usando o resultado obtido em (a), resulta que

$$H'(x) = x \left(\frac{\sqrt{x}}{x} [\sin(4x) - \frac{1}{2} \sin(x)] \right) + \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \sin t^2 dt$$

Portanto

$$H'(x) = \sqrt{x} [\text{sen}(4x) - \frac{1}{2} \text{sen}(x)] + \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} \text{sen } t^2 dt, \quad x > 0$$

3ª Questão (2,0 pontos) Calcule as seguintes integrais definidas **imediatas**

a) (1,0) $\int_1^3 \frac{x^2 + 2}{x^2} dx$ b) (1,0) $\int_{-\ln 2}^0 e^{2w} dw$

Solução

a)

$$\int_1^3 \frac{x^2 + 2}{x^2} dx = \int_1^3 \left(1 + \frac{2}{x^2}\right) dx = \int_1^3 (1 + 2x^{-2}) dx = \left(x + 2 \frac{x^{-1}}{-1}\right) \Big|_1^3 = \left(3 - \frac{2}{3}\right) - \left(1 - 2\right) = \frac{7}{3} + 1 = \frac{10}{3}$$

b)

$$\int_{-\ln 2}^0 e^{2w} dw = \frac{1}{2} \int_{-\ln 2}^0 2e^{2w} dw = \left(\frac{1}{2} e^{2w}\right) \Big|_{-\ln 2}^0 = \frac{1}{2} e^0 - \frac{1}{2} e^{-2\ln 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{\ln(2^{-2})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} 2^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

4ª Questão (4,5 pontos)

(a) (1,0) Usando a técnica de substituição, calcule $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(9-5x)^2}}$

Faça a substituição

$$u = 9 - 5x \Rightarrow du = -5dx \Rightarrow dx = -\frac{1}{5} du$$

Mudando os limites de integração, temos que se $x = 0 \Rightarrow u = 9$ e se $x = 1 \Rightarrow u = 9 - 5 = 4$. Logo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(9-5x)^2}} = \int_9^4 -\frac{1}{5} \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{5} \int_4^9 \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}} = \frac{1}{5} \int_4^9 u^{-2/3} du = \left(\frac{3}{5} u^{1/3}\right) \Big|_4^9 = \frac{3}{5} (9^{1/3} - 4^{1/3}).$$

(b) (1,0) Usando a técnica de integração por partes, encontre $\int x \sec^2 x dx$

$$\text{Faça } u = x \Rightarrow du = dx \quad \text{e} \quad dv = \sec^2 x dx \Rightarrow v = \text{tg } x$$

Assim,

$$\int x \sec^2 x dx = x \text{tg } x - \int \text{tg } x dx = x \text{tg } x - \int \frac{\text{sen } x}{\cos x} dx = x \text{tg } x + \ln |\cos x| + C$$

(c) (1,5) Usando a técnica de potências e produtos de funções trigonométricas, ache $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \text{tg}^3 x dx$

Note que podemos resolver primeiro a integral indefinida

$$\int \text{tg}^3 x dx = \int \text{tg}^2 x \text{tg } x dx = \int (\sec^2 x - 1) \text{tg } x dx = \int \sec^2 x \text{tg } x dx - \int \text{tg } x dx$$

(sec²x-1)

$$= \int \sec x \sec x \operatorname{tg} x \, dx - \int \operatorname{tg} x \, dx \quad (*)$$

$$\text{Faça } u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \operatorname{tg} x \, dx \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos

$$\int \operatorname{tg}^3 x \, dx = \int u \, du - \int \frac{\sec x}{\cos x} \, dx = \frac{u^2}{2} + \ln |\cos x| + C = \frac{\sec^2 x}{2} + \ln |\cos x| + C.$$

Por outro lado, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \operatorname{tg}^3 x \, dx &= \left(4 \frac{\sec^2 x}{2} + 4 \ln |\cos x| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \\ &= 4 \frac{\overbrace{\sec^2(\pi/4)}^{(\sqrt{2})^2}}{2} + 4 \ln \underbrace{|\cos(\pi/4)|}_{\sqrt{2}/2} - 4 \frac{\overbrace{\sec^2(0)}^1}{2} - 4 \underbrace{\ln |\cos 0|}_1 = 4 + 4 \ln \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 = 2 + 2 \ln 2 - 4 \ln 2 = 2 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

(d) (1,0) Usando a técnica de substituição trigonométrica, ache $\int \frac{8}{w^2 \sqrt{4-w^2}} \, dw$

(a) Primeiro, note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{4-w^2}$ é da forma $\sqrt{a^2-w^2}$ com $a=2$.

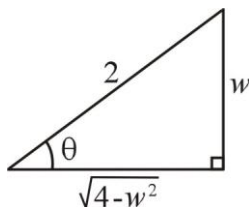


Figura 1.4

Fazendo a substituição trigonométrica $\begin{cases} w = 2 \operatorname{sen} \theta \\ dw = 2 \cos \theta \, d\theta \end{cases}$, temos que $\cos \theta = \frac{\sqrt{4-w^2}}{2}$ logo

$\sqrt{4-w^2} = 2 \cos \theta$. Portanto

$$\int \frac{8}{w^2 \sqrt{4-w^2}} \, dw = \int \frac{8}{4 \operatorname{sen}^2 \theta \cdot 2 \cos \theta} 2 \cos \theta \, d\theta = 2 \int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} \, d\theta = 2 \int \operatorname{cosec}^2 \theta \, d\theta = -2 \cot \theta + C$$

$$= -2 \frac{\sqrt{4-w^2}}{w} + C.$$