Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP1– Equações Diferenciais – 2012-2

Soluções!

Questão 1 [2,5 pts]

Calcule uma família a um parâmetro de soluções para a equação

$$x^2\,y' + xy + (xy)^2 = 4, \qquad x > 0$$

sabendo que $y_1(x) = \dfrac{2}{x}$ e $y_2(x) = -\dfrac{2}{x}$ são duas soluções particulares.

Solução: Escrevendo a equação na forma normal

$$y' - \frac{4}{x^2} + \frac{y}{x} + y^2 = 0,$$

vemos que se trata de uma equação de Riccati, para a qual $y_1(x) = \dfrac{2}{x}$ é uma solução particular [1].

Fazendo a mudança de variáveis

$$y = \frac{2}{x} + \frac{1}{z} \qquad z \neq 0$$

temos:

$$y' = -\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2} \qquad \text{e} \qquad y^2 = \frac{4}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{xz}.$$

Substituindo y, y' e y^2 na equação proposta, obtemos

$$-\frac{2}{x^2} - \frac{z'}{z^2} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{xz} + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{4}{xz} = 0$$

Simplificando os termos,

$$-\frac{z'}{z^2} + \frac{5}{xz} + \frac{1}{z^2} = 0$$

[1]Também poderíamos escolher a solução particular $y_2(x) = -\dfrac{2}{x}$.

ou seja,

$$z' - \frac{5}{x} z - 1 = 0$$

A solução geral desta equação diferencial linear não-homogênea de primeira ordem é

$$z(x) = e^{\int 5/x \ dx} \left(\int e^{-\int 5/x \ dx} (+1) \ dx + c \right)$$

Ou seja

$$z(x) = -\frac{x}{4} + c\,x^5$$

Substituindo em $y = 2/x + 1/z$, temos a família a um parâmetro de soluções

$$y(x) = \frac{2}{x} + \frac{4}{4\,cx^5 - x}.$$

Questão 2 [2,5 pts]

Calcule uma família a um parâmetro de curvas planas definindo implicitamente soluções de

$$\left(x^2 y^3 - \frac{1}{1+x^2} \right) y' \ + x^3 y^2 = 0$$

Solução:
Sejam

$$M = \left(x^2 y^3 - \frac{1}{1+x^2} \right) \quad \text{e} \quad N = x^3 y^2.$$

Observamos que

$$M_y = N_x = 3x^2 y^2,$$

de modo que a equação é exata.

Existe F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2 y^3 - \frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3 y^2 \tag{2}$$

Integrando (2) com relação y:

$$F(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + g(x) \tag{3}$$

Derivando (3) com respeito a x e igualando a (1), obtemos

$$x^2y^3 + g'(x) = x^2y^3 - \frac{1}{1+x^2}$$

Assim,

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$
$$g(x) = -arctg(x),$$

e

$$F(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} - arctg(x).$$

As soluções da equação proposta são definidas implicitamente pela família de curvas plans

$$\frac{x^3y^3}{3} - arctg(x) = c$$

Questão 3 [2,5 pontos]

Determine a solução geral de

$$(x^2 - xy + y^2)\,dx - xy\,dy = 0, \qquad y > 0 \ e \ x > y$$

Solução:

Reescrevendo a equação na forma $(x^2 - xy + y^2) - xy\,\dfrac{dy}{dx} = 0$, temos

$$M(x,y) = x^2 - xy + y^2, \qquad \text{e} \qquad N(x,y) = -xy,$$

que são funções homogêneas de grau dois.

Introduzindo a variável v por meio da equação $y = vx$, temos $y' = v + x\,v'$ e substituindo na equação $(x^2 - xy + y^2) - xy\,\dfrac{dy}{dx} = 0$, obtemos

$$[x^2 - x(vx) + (xv)^2] - x(xv)\,(v + x\,v') = 0;$$

ou ainda (simplificando x^2 nas duas parcelas)

$$(1 - v + v^2) - v\,(v + x\,v') = 0;$$

ou ainda
$$1 - v = xvv'.$$
Separando as variáveis,
$$\frac{v}{1-v}\, v' = \frac{1}{x}.$$
Daí
$$\int \frac{v}{1-v}\, dv = \int \frac{dx}{x};$$
i.é,
$$\int \frac{v-1+1}{1-v}\, dv = \int \frac{dx}{x}.$$
Portanto
$$\int \frac{v}{1-v}\, dv = \int \left[\frac{1}{1-v} - 1\right] dv = \int \frac{dx}{x}.$$
Integrando,
$$-[ln\,(1-v) + v] = ln\,x + k.$$
Ou (fazendo $k = ln\,c$)
$$-v - ln\,(1-v) = ln\,c\,x.$$
Substituindo v por y/x:
$$-(y/x) = ln\,[c\,(x-y)],$$
que é a expressão que define as soluções $y(x)$ implicitamente.

Questão 4 [2,5 pontos]

Mostre que para todo $c \in \mathbb{R}$, se $f(x) = \dfrac{c}{x} - 4x^2$, então $\mu(xy) = xy$ é um fator integrante para a equação
$$(2y^2 - 6xy)\, dx + (3xy + f(x))\, dy = 0, \qquad x > 0.$$

Solução:

Substituindo $f(x)$ por $\dfrac{c}{x} - 4x^2$ obtemos a equação
$$(2y^2 - 6xy)\, dx + \left(3xy + \frac{c}{x} - 4x^2\right) dy = 0 \tag{4}$$
Devemos mostrar que ao multiplicar (4) por $\mu(x, y) = xy$ obtemos uma equação exata.

Temos

$$\begin{aligned}
&\mu(x,y)\,\left[(2y^2-6xy)\,dx+\left(3xy+\frac{c}{x}-4x^2\right)\,dy\right]=0 \iff\\
&xy\,\left[(2y^2-6xy)\,dx+\left(3xy+\frac{c}{x}-4x^2\right)\,dy\right]=0 \iff\\
&\iff \underbrace{(2xy^3-6x^2y^2)}_{M(x,y)}\,dx+\underbrace{(3x^2y^2+cy-4x^3y)}_{N(x,y)}\,dy=0. \qquad (5)
\end{aligned}$$

Temos

$$M_y=6xy^2-12x^2y=N_x;$$

provando que (5) é uma equação exata, como queríamos mostrar.