

AP2- CÁLCULO II-2012/2 GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos).

(a) (1,5 ponto) Utilizando o método de substituição trigonométrica, calcule $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx$.

(b) (1,5 ponto) Utilizando o método de frações parciais, calcule $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx$

Solução

(a) Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{x^2-9}$ é da forma $\sqrt{x^2-a^2}$ com $a=3$.

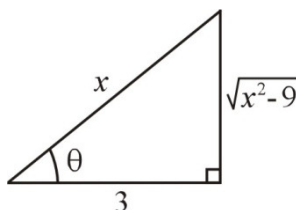


Figura 1

Fazendo a substituição trigonométrica $\begin{cases} x = 3 \sec \theta \\ dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta \end{cases}$, temos que $\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2-9}}{3}$

logo $\sqrt{x^2-9} = 3 \tan \theta$. Portanto

$$\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x} dx = \int \frac{3 \tan \theta}{3 \sec \theta} 3 \sec \theta \tan \theta d\theta = 3 \int \tan^2 \theta d\theta = 3 \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = 3 \tan \theta - 3\theta + C$$

$$= \sqrt{x^2-9} - 3 \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

(b)

$$\int \frac{x^2+3x+3}{(x+1)(x^2+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \right) dx, \text{ onde } A, B \text{ e } C \text{ são determinados como segue}$$

$$\begin{aligned} x^2+3x+3 &= A(x^2+1) + (Bx+C)(x+1) = Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C \\ &= (A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C) \end{aligned}$$

$$\text{Logo } \begin{cases} A+B=1 & (1) \\ B+C=3 & (2), \\ A+C=3 & (3) \end{cases}$$

Subtraindo (2) de (1) resulta $A - C = -2$ (4)

Somando (3) e (4) obtemos $A = \frac{1}{2}$ (5)

Substituindo (5) em (4) temos $C = \frac{5}{2}$ (6)

Substituindo (5) em (1) temos $B = \frac{1}{2}$ (7)

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 3x + 3}{(x+1)(x^2+1)} dx &= \int \left(\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x+5}{2(x^2+1)} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{x}{(x^2+1)} dx + \frac{5}{2} \int \frac{dx}{(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{2} \ln |x+1| + \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{5}{2} \arctg(x) + C \end{aligned}$$

2ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,3 ponto) Calcule a integral imprópria $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

(b) (1,2 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx$ utilizando algum dos critérios apresentados na aula.

Solução

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^b -2x e^{-x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-b^2} + \frac{1}{2} \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{e^{b^2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \text{pois } \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{b^2}} = 0. \end{aligned}$$

(b) Observe que a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}$ é contínua e positiva sobre o intervalo não limitado $[1, +\infty)$

$$\text{Note que para } x \geq 1 \Rightarrow 1+x^5 > x^5 \Rightarrow \sqrt{1+x^5} > \sqrt{x^5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^5}} < \frac{1}{\sqrt{x^5}} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^5}} < \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}}. \text{ Assim temos provado que } 0 < f(x) < g(x) \text{ onde } g(x) = \frac{1}{x^{3/2}}$$

Por outro lado, sabemos dos exemplos referenciais do caderno de coordenação [ou calculando diretamente] que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx$ converge. Logo pelo critério de comparação podemos afirmar que

$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}} dx \text{ converge.}$$

3ª Questão (2,5 pontos) Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelo eixo Ox , o eixo Oy , a reta $y = 2$ e a parábola $y^2 = 12 - 4x$

(a) (1,0 ponto) Esboce a região $\mathcal{R}$.

(b) (1,5 ponto) Usando o método das cascas cilíndricas calcule o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo Ox

Solução

(a) Lembre que $y^2 = 12 - 4x = -4(x - 3)$ é a parábola de vértice $(3,0)$ que abre para a esquerda. A região $\mathcal{R}$ é mostrada na Figura 2.

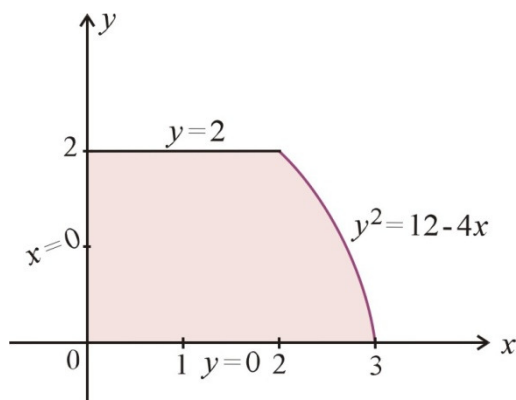


Figura 2

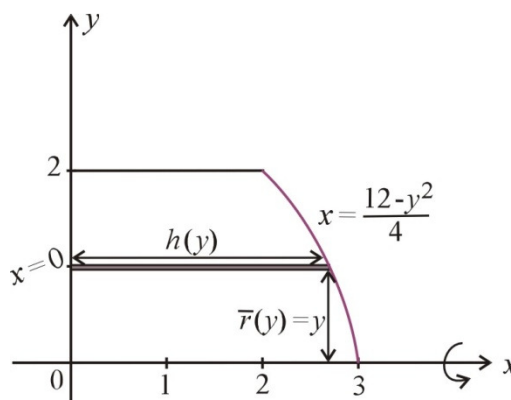


Figura 3

(b) Pelo método das cascas cilíndricas, vemos na Figura 3 que $\bar{r}(y) = y$ e $h(y) = \frac{12 - y^2}{4}$. Assim o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno do eixo Ox é dado por

$$\begin{aligned} V(R) &= 2\pi \int_0^2 \bar{r}(y) h(y) dy = 2\pi \int_0^2 y \left(\frac{12 - y^2}{4} \right) dy = \frac{\pi}{2} \int_0^2 (12y - y^3) dy \\ &= \frac{\pi}{2} \left(6y^2 - \frac{y^4}{4} \right) \Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} (24 - 4) = 10\pi \text{ unidades de volume.} \end{aligned}$$

4ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto) Usando variáveis separáveis encontre a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = (1 - 2x)y^2 \\ y(0) = -\frac{1}{6} \end{cases}.$$

(b) (1,0 ponto) Determine a solução geral de: $xy' - 2y = x^2$, $x > 0$

Solução

(a) $\frac{dy}{dx} = (1 - 2x)y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = (1 - 2x) dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int (1 - 2x) dx$

$$\Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = x - 2\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow \frac{-1}{y} = x - x^2 + C \text{ e usando o valor inicial } y(0) = -\frac{1}{6} \text{ resulta}$$

$$-\frac{1}{-1/6} = 0 - 0^2 + C \Rightarrow C = 6. \text{ Portanto a solução do problema de valor inicial é}$$

$$\frac{-1}{y} = x - x^2 + 6 \text{ ou } y = \frac{1}{x^2 - x - 6}.$$

(b) Observe que a equação $xy' - 2y = x^2$, $x > 0$ pode ser colocada na forma padrão da equação linear de primeira ordem $y' - \frac{2}{x}y = x$, $x > 0$ onde $p(x) = -\frac{2}{x}$ e $q(x) = x$ sendo p e q funções contínuas em $I = (0, +\infty)$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula. Note que

$$\int p(x) dx = -\int \frac{2}{x} dx = -2 \ln |x| = \ln x^{-2} \quad x \in I$$

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2}$, $x \in I$. Logo, multiplicando a equação diferencial pelo fator $\mu(x)$, resulta:

$$\underbrace{x^{-2}y' - \frac{2}{x^3}y}_{\frac{d}{dx}(x^{-2}y)} = x^{-1} \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^{-2}y) = \frac{1}{x} \Rightarrow x^{-2}y = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow x^{-2}y = \ln x + C, \text{ onde } C$$

é uma constante arbitrária.

$\Rightarrow y = x^2(\ln x + C)$, onde $x \in I$, é a solução geral da equação diferencial linear dada.