Cálculo II – AD1 (2010/1) GABARITO

1ª Questão (1,5 ponto) Use somas de Riemann para encontrar $\int_{-1}^{2} (x^3 + x)\,dx$. Justifique o seu procedimento.

Solução

Observe que a função $f(x) = x^3 + x$ é contínua em [-1,2] e portanto integrável em [-1,2].

Assim, $\int_{-1}^{2} (x^3 + x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$, para qualquer seqüencia (S_n) de somas de Riemann de f em [-1,2].

Assim, considerando $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{2-(-1)}{n} = \dfrac{3}{n}$, para $b = 2$, $a = -1$ e $k = 1,...,n$.

Observe que para cada inteiro $n \geq 1$ consideramos os pontos:

$$a = -1 = x_0, \quad x_1 = -1 + \frac{3}{n}, \quad x_2 = -1 + 2(\frac{3}{n}) \quad ,..., \quad x_k = -1 + k(\frac{3}{n}) \quad ,..., \quad x_n = -1 + n(\frac{3}{n}) = 2 = b.$$

Como $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$; (podemos escolher **por exemplo** a extremidade direita dos sub- intervalos) $t_k = x_k = -1 + k(\frac{3}{n})$. Logo,

$$f(t_k) = f(-1 + k(\frac{3}{n})) = (-1 + k(\frac{3}{n}))^3 + (-1 + k(\frac{3}{n}))$$

Assim, a Soma de Riemann de $f(x) = x^3 + x$ sobre [-1,2] será :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} [(-1 + \frac{3k}{n})^3 + (-1 + \frac{3k}{n})](\frac{3}{n})$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} [(-1 + 3\frac{3k}{n} - 3k^2 \frac{3^2}{n^2} + k^3 \frac{3^3}{n^3}) + (-1 + \frac{3k}{n})]$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} (-2 + k\frac{12}{n} - k^2 \frac{3^3}{n^2} + k^3 \frac{3^3}{n^3})$$

$$= \frac{-6}{n} \sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{36}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{81}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{81}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$S_n = -\frac{6}{n}(n) + \frac{36}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{81}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + \frac{81}{n^4}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$

$$= -6 + 18\left(\frac{(n+1)}{n}\right) - \frac{27}{2}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) + \frac{81}{4}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)$$

$$S_n = -6 + 18\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{27}{2}\left((1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})\right) + \frac{81}{4}\left((1+\frac{1}{n})^2\right)$$

Assim, lembrando que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, resulta:

$$\int_{-1}^{2} (x^3 + x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n = -6 + 18(1) - \frac{27}{2}\left((1)(2)\right) + \frac{81}{4}\left((1)^2\right)$$

$$= +12 - 27 + \frac{81}{4} = -15 + \frac{81}{4} = \frac{21}{4}.$$

2ª Questão (2,0 pontos)

Não há uma maneira simples para representar a função $F(x) = \int_0^x \text{sen}^2\, t^2\, dt$.

Por exemplo, não podemos representar F como somas, diferenças, produtos, quocientes ou composições de funções elementares. Entretanto, podemos ainda obter muita informação sobre F usando a 1ª forma do Teorema Fundamental do Cálculo, as propriedades da integral definida e depois aplicando os métodos desenvolvidos no Cálculo I.

Faca o que se pede:

(a) (0,6) Dê o domínio de F. Explique por que F é derivável para todo x. Encontre $F'(x)$. F é contínua ? Justifique sua resposta.

(b) (0,4) Encontre os números críticos de F. Encontre os intervalos nos quais F é crescente (se houver) e os intervalos em que F é decrescente (se houver).Os máximos e mínimos locais (se houver).

(c) (0,8) Encontre os intervalos nos quais o gráfico de F é côncavo para cima (se houver) e os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para baixo (se houver). **Faça o estudo detalhado da concavidade do gráfico de F no intervalo $(-\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})$.**

(d) (0,2) Encontre as abscissas dos pontos de inflexão do gráfico de F (se houver).Justifique sua resposta.

Solução

(a) Verifica-se que o integrando $f(t) = \text{sen}^2\, t^2$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ (pois é a composição de funções continuas em $\mathbb{R}$), logo pela 1ª forma do Teorema Fundamental do

Cálculo temos que $F(x)=\int_0^x \text{sen}^2\, t^2\, dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $F'(x)=\text{sen}^2\, x^2$. Por outro lado do cálculo I, sabemos que se F é derivável em $\mathbb{R}$ então F é contínua em $\mathbb{R}$.

(b) Observe que $F'(x)=\text{sen}^2\, x^2=(\text{sen}\, x^2)^2$ para todo $x\in\mathbb{R}$. Para achar os números críticos de F procuramos os pontos onde $F'(x)=0$ ou não existe F'. Como neste caso F' sempre existe os únicos números críticos são os números tais que $\text{sen}\, x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2=n\pi$ para $n\geq 0, n\in\mathbb{N}$, isto é $\boxed{x=\pm\sqrt{n\pi} \quad n\geq 0, n\in\mathbb{N}}$.Como $F'(x)=\text{sen}^2\, x^2=(\text{sen}\, x^2)^2\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}$, podemos concluir que F é crescente em $\mathbb{R}$ e não existem nem mínimo nem máximo relativo nos pontos críticos achados.

(c) $F''(x)=(2\text{sen}\, x^2\cos x^2)2x=2x\,\text{sen}\, 2x^2$ (*)

$F''(x)=0\Leftrightarrow x=0 \quad ou \quad \text{sen}\, 2x^2=0$

$\Leftrightarrow \quad x=\pm\sqrt{n\pi/2},\ n=0,1,2,...$

De (*) podemos ver também que o sinal de F'' depende do sinal de $2x$ (que é uma função impar) e do sinal da função $y=\text{sen}^2\,(2x^2)$ (que é uma função par).
Por outro lado para justificar os valores da função $y=\text{sen}^2\,(2x^2)$ nos intervalos abaixo, mostraremos na Figura 2, um esboço do gráfico da função $y=\text{sen}^2\,(2x^2)$.

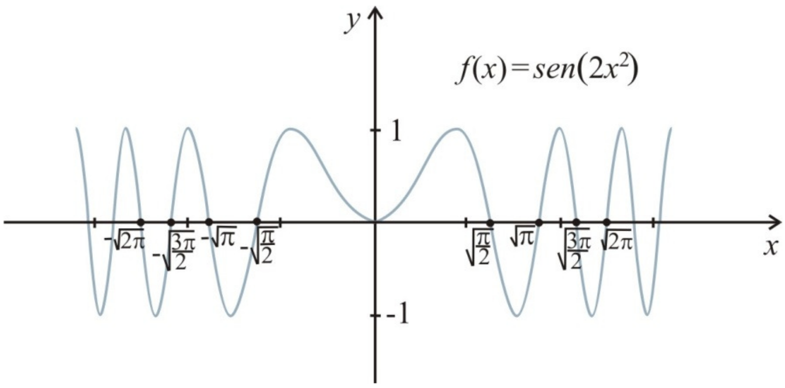


Figura 2

Vamos fazer o estudo detalhado da concavidade do gráfico de F no intervalo $(-\sqrt{2\pi},\sqrt{2\pi})$, analogamente poderá ser feito o estudo no resto do domínio. Neste intervalo vemos que os números que anulam a segunda derivada para $n=0,\pm1,\pm2,\pm3$ são: $-\sqrt{\pi}$, 0, $\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$, $\pm\sqrt{\pi}$ e $\pm\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}}$. Observe que para $n=\pm4$ temos que os extremos do intervalo também são também zeros da derivada segunda de F.

Intervalos	$-\sqrt{2\pi} < x < -\sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	$-\sqrt{\frac{3\pi}{2}} < x < -\sqrt{\pi}$	$-\sqrt{\pi} < x < -\sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < 0$
Sinal de $2x$	–	–	–	–
Sinal de $\operatorname{sen} 2x^2$	–	+	–	+
Sinal de $F''(x)$	+	–	+	–
Concavidade do gráfico de F	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Intervalos	$0 < x < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} < x < \sqrt{\pi}$	$\sqrt{\pi} < x < \sqrt{\frac{3\pi}{2}}$	$\sqrt{\frac{3\pi}{2}} < x < \sqrt{2\pi}$
Sinal de $2x$	+	+	+	+
Sinal de $\operatorname{sen} 2x^2$	+	–	+	–
Sinal de $F''(x)$	+	–	+	–
Concavidade do gráfico de F	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

Podemos afirmar então que o gráfico de F é côncavo para baixo nos intervalos da forma

$$\ldots\cup(-\sqrt{\frac{3\pi}{2}},-\sqrt{\pi})\cup(-\sqrt{\frac{\pi}{2}},0)\cup(\sqrt{\frac{\pi}{2}},\sqrt{\pi})\cup(\sqrt{\frac{3\pi}{2}},\sqrt{2\pi})\cup\ldots$$

E o gráfico de F é côncavo para cima nos intervalos da forma

$$\ldots\cup(-\sqrt{2\pi},-\sqrt{\frac{3\pi}{2}})\cup(-\sqrt{\pi},-\sqrt{\frac{\pi}{2}})\cup(0,\sqrt{\frac{\pi}{2}})\cup(\sqrt{\pi},\sqrt{\frac{3\pi}{2}})\cup\ldots\ .$$

(d) Então existe mudança de concavidade nos pontos da forma $(\pm\sqrt{\frac{n\pi}{2}}, F(\pm\sqrt{\frac{n\pi}{2}}))$, $n = 0,1,2,\ldots$ e dado que F é derivável em $\mathbb{R}$ existe reta tangente nesses pontos assim podemos afirmar que esses pontos são pontos de inflexão do gráfico de F. Por tanto as abscissas dos pontos de inflexão são da forma $x = \pm\sqrt{\frac{n\pi}{2}},\quad n = 0,1,2,\ldots$.

- Com base na informação encontrada (a)-(d), fornecemos na Figura 3 (só para seu conhecimento) o esboço do gráfico da função F. Por outro lado após a sexta semana de aulas, você estará em condições de mostrar analiticamente que F é uma função ímpar.

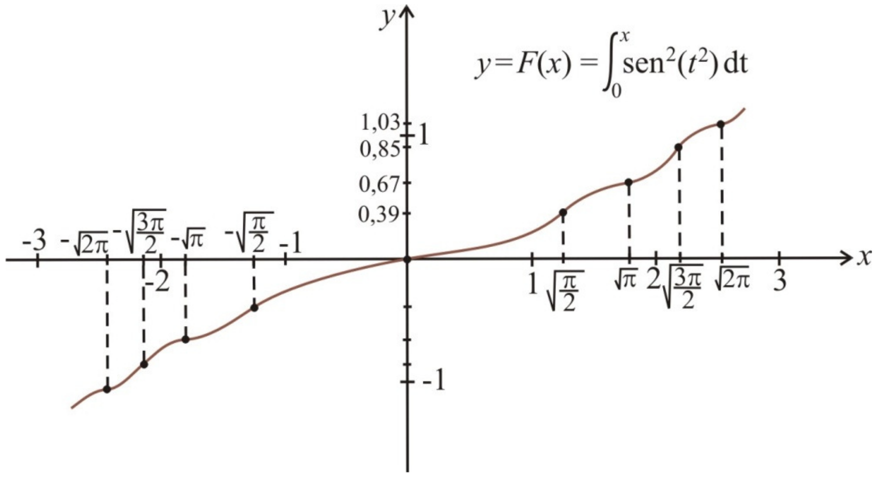


Figura 3

3ª Questão (3,0 pontos) Calcule

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi x} \cos(\pi \text{tg}\, t)\,dt}{x^2 \displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt}$ (b) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\text{sen}t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$

Justifique o seu procedimento em cada caso.

Solução

a) Observe que quando $x \to \frac{1}{4}$ então $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(\pi \text{tg}\, t)\,dt = 0$ e

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \int_1^{2\sqrt{\frac{1}{4}}} \sqrt{t^2+1}\,dt = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \underbrace{\int_1^1 \sqrt{t^2+1}\,dt}_{0} = 0$$

Assim, $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi x} \cos(\pi \text{tg}\, t)\,dt}{x^2 \displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt} \to \frac{0}{0}$, portanto podemos aplicar a regra de L´Hôpital

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi x} \cos(\pi \text{tg}\, t)\,dt}{x^2 \displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\frac{1}{4}} \frac{\overbrace{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi x} \cos(\pi \text{tg}\, t)\,dt}^{1aF\ \ TFC\ \ e\ \ f.composta}}{x^2 \underbrace{\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt}_{1aF\ \ TFC\ \ e\ \ f.composta} + 2x\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt}$$

Aplicando a 1ª forma do Teorema fundamental do Cálculo e a regra da cadeia resulta

$$= \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{\pi \cos(\pi \operatorname{tg}(\pi x))}{x^2(\sqrt{(2\sqrt{x})^2+1})\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2x\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt}$$

$$= \lim_{x \to \frac{1}{4}} \frac{\pi \cos(\pi \operatorname{tg}(\pi x))}{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{4x+1}) + 2x\displaystyle\int_1^{2\sqrt{x}} \sqrt{t^2+1}\,dt} = \frac{\pi \cos(\pi \overbrace{\operatorname{tg}(\pi \tfrac{1}{4})}^{1}))}{(\frac{1}{4})^{\frac{3}{2}}(\sqrt{4\frac{1}{4}+1}) + 2\frac{1}{4}\underbrace{\displaystyle\int_1^{1} \sqrt{t^2+1}\,dt}_{0}} = \frac{\pi(-1)}{\frac{1}{8}\sqrt{2}} = -(4\sqrt{2})\pi$$

(b) $\dfrac{d^2}{dx^2}\displaystyle\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt$

Observe que podemos escrever

$G(t) = \displaystyle\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du = (H \circ g)(t)$, onde $H(t) = \displaystyle\int_1^{t} \sqrt{1+u^4}\,du$ e $g(t) = \operatorname{sen} t$ (1)

É claro que $f(t) = \sqrt{1+t^4}$ é uma função contínua $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo podemos afirmar que H é derivável em $\mathbb{R}$ e $H'(t) = \sqrt{1+t^4}$. Por outro lado a função $g(t) = \operatorname{sen} t$ é derivável em $\mathbb{R}$ e $g'(t) = \cos t$, logo pela regra da cadeia

$G = H \circ g$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$G'(t) = (H \circ g)'(t) = H'(g(t))\,g'(t) = (\sqrt{1+(\operatorname{sen} t)^4})\cos t = \cos t\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 t} \qquad (2)$$

Por outro lado

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt \underset{(1)}{=} \frac{d^2}{dx^2}\int_0^x G(t)\,dt = \frac{d}{dx}\left[\underbrace{\frac{d}{dx}\left(\underbrace{\int_0^x G(t)\,dt}_{F(x)}\right)}_{F'(x)}\right] \qquad (3)$$

De (2) sabemos que G é derivável em $\mathbb{R}$ logo é continua em $\mathbb{R}$, assim pela primeira forma do Teorema Fundamental do Cálculo temos que $F(x) = \displaystyle\int_0^x G(t)\,dt$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$F'(x) = G(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ (4)

Substituindo (4) em (3) temos que

$$\frac{d^2}{dx^2}\int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\,du\right)dt \underset{(3)}{=} \frac{d}{dx}F'(x) \underset{(4)}{=} \frac{d}{dx}G(x) = G'(x) \underset{(2)}{=} \cos x\sqrt{1+\operatorname{sen}^4 x}$$

4ª Questão (2 pontos) Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre os gráficos de $y^2 = x^3$ e $x = y^2 + y - 1$ sobre o intervalo $-1 \leq y \leq 1$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

b) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável x.

c) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação á variável y .

d) Encontre a área da região $\mathcal{R}$ usando a representação mais conveniente.

Solução

a) O esboço da região $\mathcal{R}$ é apresentado na Figura 4.

Observe que o gráfico esta limitado pela parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ e a parábola $x = y^2 + y - 1$, esta última equação depois de completar quadrados transforma-se em $x = y^2 + y + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{5}{4}$, isto é $x + \frac{5}{4} = (y + \frac{1}{2})^2$ ou seja, uma parábola de vértice em $(-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2})$ e que abre para a direita . Como $-1 \leq y \leq 1$ resulta que a região pedida é:

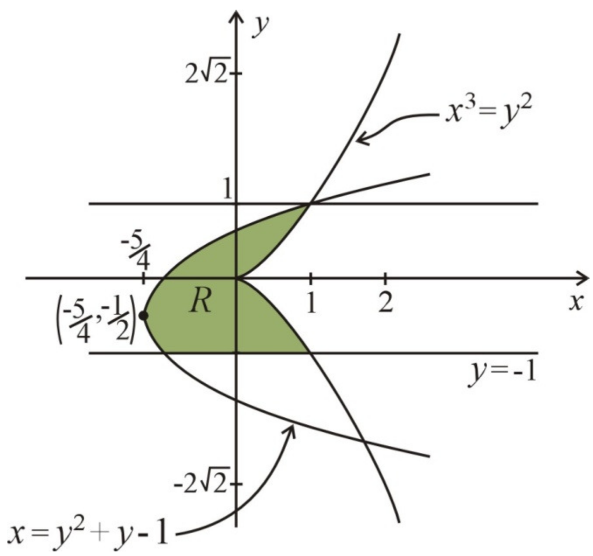


Figura 4

Observe que se $y = -1$ as interseções com a parábola $x = y^2 + y - 1$ da $x = (-1)^2 + (-1) - 1 = -1$ e com a parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ da $x = 1$. Obtemos assim os pontos de interseção $(-1, -1)$ e $(1, -1)$

Se $y = 1$ a interseção com a parábola $x = y^2 + y - 1$ da $x = (1)^2 + (1) - 1 = 1$ e com a parábola semi-cúbica $y^2 = x^3$ da também $x = 1$, então as três curvas tem interseção no ponto (1,1)

b) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável x.

Note-se que da equação $x = y^2 + y - 1$ temos que $0 = y^2 + y - 1 - x$, isto é, $y^2 + y - (1 + x) = 0$. Assim, $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(1 + x)}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5 + 4x}}{2}$

Portanto para $x \geq -\frac{5}{4}$ temos duas funções: $y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2}$ que é ramo superior da parábola e $y = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5+4x}}{2}$ que é o ramo inferior da parábola.

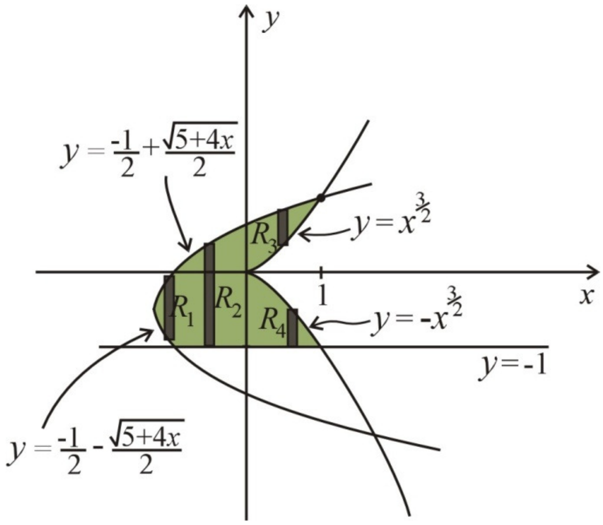


Figura 5

Observe que neste caso devemos dividir a região em 4 sub-regiões R_1, R_2, R_3 e R_4. Assim $A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4)$

Levando em conta as informações obtidas em (a) e (b) podemos concluir que

$$A(R) = \underbrace{\int_{-\frac{5}{4}}^{-1} [-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2} - (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5+4x}}{2})]dx}_{A(R_1)} + \underbrace{\int_{-1}^{0} [-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2} - (-1)]dx}_{A(R_2)}$$

$$+ \underbrace{\int_{0}^{1} [-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2} - x^{\frac{3}{2}}]dx}_{A(R_3)} + \underbrace{\int_{0}^{1} (-x^{\frac{3}{2}} - (-1))dx}_{A(R_4)}$$

$$A(R) = \int_{-\frac{5}{4}}^{-1} \sqrt{5+4x}\, dx + \int_{-1}^{0} [\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2}]dx$$

$$+ \int_{0}^{1} [-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5+4x}}{2} - x^{\frac{3}{2}}]dx + \int_{0}^{1} (-x^{\frac{3}{2}} + 1)dx$$

c) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação á variável y.

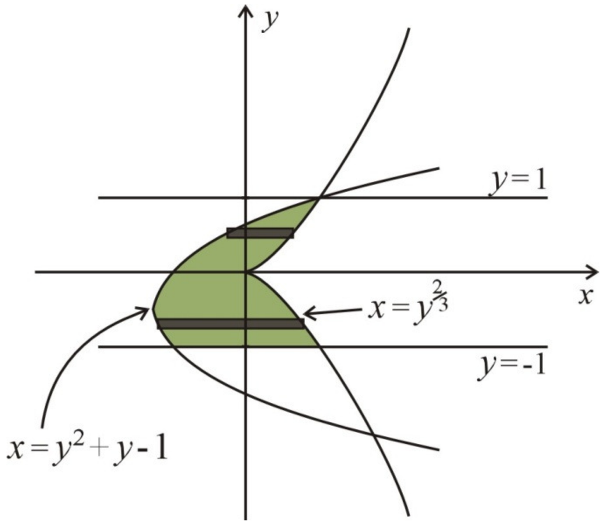


Figura 6

Neste caso podemos calcular a área sem necessidade de dividir em regiões,

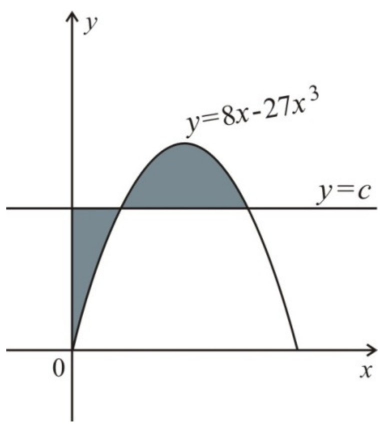
$$A(R)=\int_{-1}^{1}[y^{\frac{2}{3}}-(y^2+y-1)]dy=\int_{-1}^{1}[y^{\frac{2}{3}}-y^2-y+1)]dy$$

d) Para calcular a área usaremos a representação em relação à variável y

$$A(R)=3\frac{y^{\frac{5}{3}}}{5}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^2}{2}+y\Bigg]_{-1}^{1}=\frac{3}{5}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1+\frac{3}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1$$

$$=\frac{6}{5}-\frac{2}{3}+2=\frac{18-10+30}{15}=\frac{38}{15}$$ unidades de área.

5ª Questão (1,5 ponto) A figura seguinte mostra uma reta horizontal $y=c$ interceptando a curva $y=8x-27x^3$. Ache o número c tal que as áreas das regiões sombreadas sejam iguais.



Solução

Queremos achar o número c tal que as áreas das regiões sombreadas sejam iguais, observe que a reta $y=c$ corta a função dada em dois pontos, suponha que esses valores são $x=a$ e $x=b$ onde $0<a<b$. Temos então que

$$c = 8a - 27a^3 \tag{1}$$

$$c = 8b - 27b^3 \tag{2}$$

Como as áreas sombreadas são iguais resulta que

$$\int_0^a [c-(8x-27x^3)]dx = \int_a^b [8x-27x^3)-c]dx$$

Integrando cada membros temos

$$cx - 8\frac{x^2}{2} + 27\frac{x^4}{4}\Bigg]_0^a = (8\frac{x^2}{2} - 27\frac{x^4}{4}) - cx\Bigg]_a^b$$

$$ca - 4a^2 + \frac{27}{4}a^4 = (4b^2 - \frac{27}{4}b^4) - cb - [(4a^2 - \frac{27}{4}a^4) - ca]$$

$$ca - 4a^2 + 27\frac{a^4}{4} = 4b^2 - 27\frac{b^4}{4} - cb - 4a^2 + 27\frac{a^4}{4} + ca$$

$$0 = 4b^2 - \frac{27}{4}b^4 - cb \tag{3}$$

Substituindo (2) na equação(3) obtemos

$$0 = 4b^2 - \frac{27}{4}b^4 - (8b - 27b^3)b = 4b^2 - \frac{27}{4}b^4 - 8b^2 + 27b^4 = -4b^2 + \frac{81}{4}b^4$$

$$0 = b^2(-4 + \frac{81}{4}b^2)$$

Como $0 < b$ então $4 = \frac{81}{4}b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{81}$ Isto é

$$b = \frac{4}{9} \tag{4}$$

Substituindo (4) em (2) resulta que

$$c = 8(\frac{4}{9}) - 27(\frac{4}{9})^3 = \frac{32}{9} - 4(\frac{16}{27}) = \frac{32}{9} - \frac{64}{27} = \frac{96-64}{27} = \frac{32}{27}.$$