Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

# Primeira Avaliação a Distância de Geometria Analítica I – 1.2012

**Profs. Linhares e Leonardo Silvares**

Nome: ______________________________________________

Polo: ______________________________________________

**Questão 1 (2,5 pontos):** Considerando os pontos $A = (0,0)$, $B = (0,4)$, $C = (2\sqrt{3}, 6)$, $D = (2\sqrt{3}, 2)$, calcule os comprimentos dos lados de *ABCD*, e verifique quais pares de lados são paralelos. A partir destes dados, diga a quais das seguintes classes de quadrilátero *ABCD* pertence e a quais não pertence:

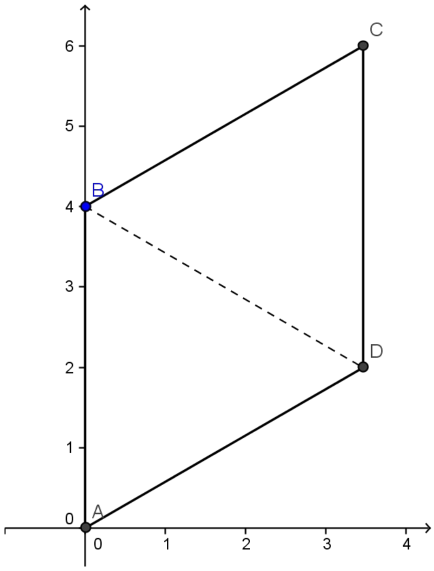
- paralelogramo (dois pares de lados paralelos)
- trapézio (apenas um par de lados paralelos)
- losango (todos os lados congruentes)
- retângulo (todos os ângulos internos retos)
- quadrado (todos os lados congruentes e ângulos internos retos)

  (observe que o quadrilátero sr classificado em mais de uma categoria)

Agora, calcule o comprimento da diagonal *BD* e determine as medidas de todos os ângulos internos deste quadrilátero.

**Solução:**

Abaixo (e apenas para orientar a solução), vemos os pontos representados no plano cartesiano:




As medidas dos lados *AB*, *BC*, *CD* e *DA* serão dadas, respectivamente, pelos comprimentos dos vetores $\overrightarrow{AB}$ , $\overrightarrow{BC}$ , $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{DA}$ . Assim,

$$\overrightarrow{AB}=(0-0,4-0)=(0,4), \text{ logo } \ med\,(AB)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+4^2}=\sqrt{16}=4,$$

$$\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3}-0,6-4)=(2\sqrt{3},2), \text{ logo } \ med\,(BC)=|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4,$$

$$\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{3}-2\sqrt{3}\,,2-6)=(0,-4), \text{ logo } \ med\,(CD)=|\overrightarrow{CD}|=\sqrt{0^2+(-4)^2}=\sqrt{16}=4, \text{ e}$$

$$\overrightarrow{DA}=(0-2\sqrt{3}\,,0-2)=(-2\sqrt{3}\,,-2), \text{ logo } \ med\,(AD)=|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4.$$

(**Obs.**: *med*( ) denota a medida - ou comprimento - do segmento.)

Logo, todos os lados são congruentes.

Como $\overrightarrow{AB}=(0,4)$ e $\overrightarrow{CD}=(0,-4)$ , temos que $\overrightarrow{AB}=-1\cdot\overrightarrow{CD}$ , logo $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são paralelos. Como $\overrightarrow{BC}=(2\sqrt{3},2)$ e $\overrightarrow{DA}=(-2\sqrt{3},-2)$ , temos que $\overrightarrow{BC}=-1\cdot\overrightarrow{DA}$ , logo $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DA}$ são paralelos. Assim, são paralelos os pares de lados

- *AB* e *CD* e
- *BC* e *DA*.

O quadrilátero será então um **paralelogramo**, e, como possui todos os lados congruentes, será também um **losango**. Podemos ver também que o quadrilátero **não é um trapézio**.

**Obs.:** O estudo do paralelismo dos lados poderia ser feito utilizando quaisquer outros vetores que representassem os lados, como, por exemplo, $\overrightarrow{AD}$ ao invés de $\overrightarrow{DA}$ , $\overrightarrow{CB}$ ao invés de $\overrightarrow{BC}$ .

O comprimento da diagonal *BD* é dado pelo módulo do vetor $\overrightarrow{BD}=(2\sqrt{3}-0,2-4)=(2\sqrt{3},-2)$ .

Assim,

$$med\,(BD)=\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=4 \quad .$$

Observe então que os triângulos *ABD* e *BCD* serão equiláteros, logo, os ângulos internos terão medida 60º. Assim, as medidas dos ângulos do quadrilátero são:

$$med\,(A\hat{B}C)=60^o+60^o=120^o,$$

$$med\,(B\hat{C}D)=60^o,$$

$$med\,(C\hat{D}A)=60^o+60^o=120^o, \quad \text{e}$$

$$med\,(D\hat{A}C)=60^o \quad .$$

Assim, o quadrilátero não tem todos os ângulos internos retos, logo, **não será** um **quadrado** nem um **retângulo**.

**Questão 2 (2,5 pontos):** Sejam $u = (4, 3)$ e $v = (8, a)$ vetores, com *a* real.

(a) Determine *a* para que *u* e *v* sejam paralelos

(b) Determine o(s) valor(es) de *a* para o quais $|v| = 10$.

(c) Determine o valor de *a* para para os quais $|v| = 10$ e $w = (16, 0)$ possa ser escrito como combinação linear de *u* e *v*. Depois, exiba esta combinação linear.

**Solução:**

(a) Para *u* e *v* serem paralelos, deve existir um número real $\lambda$ tal que

$$v = \lambda\, u \Leftrightarrow (8, a) = \lambda\,(4, 3) \Leftrightarrow (8, a) = (4\,\lambda, 3\,\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 8=4\lambda \\ a=3\lambda \end{cases} .$$

Da primeira equação, temos $\lambda = 2$. Assim, $a = 3\cdot 2 = 6$.

**Obs.**: Poderia ter sido considerado $u = \lambda\, v$, caso no qual teríamos o mesmo valor para *a*, e $\lambda = 1/2$.

(b) $10=|v|=\sqrt{8^2+a^2}\Leftrightarrow 8^2+a^2=100\Leftrightarrow a^2=36\Leftrightarrow a=\pm 6.$

(c) Para que $|v| = 10$, devemos ter, pelo item (b), $a = 6$ ou $a = -6$, que correspondem, respectivamente, a $v = (8, 6)$ ou $v = (8, -6)$ . Queremos que seja possível encontrar *s* e *t* reais tais que $w = s\cdot u + t \cdot v$.

Para $a = 6$ e $v = (8, 6)$, temos

$$(16, 0) = s \cdot (4, 3) + t \cdot (8, 6),$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 4s+8t=16 \\ 3s+6t=0 \end{cases},$$

que implica

$$\begin{cases} s=4-2\mathrm{t} \\ s=-2t \end{cases},$$

Assim, temos 4 – 2*t* = – 2*t*, logo 4 = 0. Como isto é impossível, não podemos escrever (16, 0) como combinação linear de *u* = (4, 3) ou *v* = (8, 6), portanto não podemos ter *a* = 6.

Para *a* = – 6 e *v* = (8, – 6), temos

$$(16, 0) = s \cdot (4, 3) + t \cdot (8, -6),$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 4s+8t=16 \\ 3s-6t=0 \end{cases},$$

que implica

$$\begin{cases} s=4-2\mathrm{t} \\ s=2t \end{cases},$$

Assim, temos 4 – 2*t* = 2*t*, logo 4*t* = 4, implicando *t* = 1 e *s* = 2. Assim,

$$(16, 0) = 2 \cdot (4, 3) + 1 \cdot (8, -6),$$

Desta forma, *a* = – 6 é a única solução.

**Questão 3 (2,5 pontos):** Dê as equações paramétrica e cartesiana da reta *r* que passa pelo ponto (0, 2) e tem direção dada pelo vetor *v* = (2, 1). Determine agora *b* para que as retas *r* e *s*: *x* + *b y* = 0 sejam paralelas (e não coincidentes).

**Solução:** A reta *r* que passa por (0,2) e tem a direção do vetor (0, 2) pode ser parametrizada por

$$r:(x, y)=(0,2)+t\cdot(2,1), t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0+2\mathrm{t} \\ y=2+t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

Para obter uma equação cartesiana, podemos isolar o *t* nas duas equações,

$$\begin{cases} x=0+2\mathrm{t} \\ y=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{x}{2} \\ t=y-2 \end{cases},$$

logo,

$$\frac{x}{2} = y - 2 \Leftrightarrow x = 2y - 4 \Leftrightarrow x - 2y + 4 = 0.$$

Vamos agora determinar $b$ para que as retas $r$ e $s$: $x + b\,y = 0$ sejam paralelas, e faremos de duas formas (existem muitas outras formas de fazer).

**1ª forma:**

Para que $r$ e $s$ sejam paralelas e não coincidentes, a interseção destas retas deve ser vazia. Assim o sistema

$$\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + b\,y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -4 \\ x + by = 0 \end{cases}$$

deve ser impossível. Subtraindo a segunda equação da primeira, temos, $(-2 - b)\,y = -4$, logo $y = 2 / (b + 2)$. O sistema será então impossível para $b = -2$.

**2ª forma:**

Vamos escrever $s$: $x + b\,y = 0$ na forma paramétrica. Fazendo $x = t$, temos $by = -t$, logo

$$\begin{cases} x = 0 + 1 \cdot t \\ y = 0 - \frac{1}{b} \cdot t \end{cases}.$$

Assim, uma direção da reta $s$ é dada por $(1, -1 / b)$. Para que $r$ e $s$ sejam paralelas, seus vetores direção $(2,1)$ e $(1, -1 / b)$ devem ser paralelos. Assim,

$$(2,1) = \lambda\left(1, -\frac{1}{b}\right) \therefore \begin{cases} 2 = \lambda \\ 1 = -\frac{\lambda}{b} \end{cases} \therefore 1 = -\frac{2}{b} \therefore b = -2.$$

**Questão 4 (2,5 pontos):** Determine $y_A$ em função de $x$ para que o ponto $A = (x_A, y_A)$ esteja sobre a reta $r$: $x - 7y + 25 = 0$. Determine agora as possibilidades para o ponto $A$ de modo que, além de estar na reta $r$, sua distância à origem seja 5.

**Solução:**

Para que $A = (x, y) \in r$, o par $(x, y)$ deve ser solução da equação $r$: $x - 7y + 25 = 0$.

Assim,

$$x_A - 7y_A + 25 = 0 \therefore 7y_A = 25 + x_A \therefore y_A = \frac{x_A + 25}{7}.$$

Queremos agora que $d(A, (0,0)) = 5$. Para isso,

$$5 = \mathrm{d}((x_A, y_A),(0{,}0)) = \sqrt{(x_A - 0)^2 + (y_A - 0)^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} = \sqrt{x_A^2 + \left(\frac{x_A + 25}{7}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x_A^2 + \frac{x_A^2 + 50\,x_A + 625}{49}} = \sqrt{\frac{50\,x_A^2 + 50\,x_A + 625}{49}} = \sqrt{\frac{25(2\,x_A^2 + 2\,x_A + 25)}{49}} = \frac{5}{7}\sqrt{2\,x_A^2 + 2\,x_A + 25}$$

Assim,

$$5 = \frac{5}{7}\sqrt{2\,x_A^2 + 2\,x_A + 25} \therefore 7 = \sqrt{2\,x_A^2 + 2\,x_A + 25} \therefore 49 = 2\,x_A^2 + 2\,x_A + 25 \therefore x_A^2 + x_A - 12 = 0 \quad ,$$

que nos dá $x_A = -4$ ou $x_A = 3$, que implicam, respectivamente $y_A = (-4 + 25)/7 = 3$, e $y_A = (3 + 25)/7 = 4$. Assim, obtemos os pontos

$$A = (-4, 3) \text{ e } A' = (3, 4).$$

Observem que, ao elevar a equação ao quadrado, não podemos garantir mais a equivalência, assim, é necessário "testar" as soluções encontradas nas condições originais:

$$(-4) - 7(3) + 25 = 0 \text{ e } \quad \mathrm{d}((-4,3),(0{,}0)) = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \quad ,$$

$$3 - 7(4) + 25 = 0 \text{ e } \quad \mathrm{d}((3,4),(0{,}0)) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \quad .$$

Assim, encontramos corretamente as duas possibilidades para $A$. **[é importante ressaltar a necessidade de verificar as soluções decorrentes de uma equação irracional, mas não descontar ponto se o aluno não o fizer]**