Aula 1

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de autovalor e autovetor;
2. reconhecer um escalar como autovalor de uma matriz;
3. reconhecer um vetor como autovetor de uma matriz.

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES

Bem-vindo ao seu próximo curso de Álgebra Linear. Ele se desenvolverá em torno de conceitos fundamentais como autovalor e autovetor de uma matriz. Esses conceitos são de fundamental importância na Matemática pura e aplicada e aparecem em situações muito mais gerais que as consideradas aqui. Os conceitos de autovalor e autovetor também são usados no estudo das equações diferenciais e sistemas dinâmicos: eles fornecem informações críticas em projetos de Engenharia e surgem de forma natural em áreas como a Física e a Química.

Lembre que $M_n(\mathbb{R})$ denota o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com elementos reais.

Neste módulo vamos continuar os estudos iniciados no curso de Álgebra Linear I, sobre as matrizes quadradas $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ e as transformações lineares definidas pela matriz A.

O objetivo principal desta aula é apresentar os conceitos fundamentais de autovalor e autovetor de uma matriz A.

Definição 1.1.

Dada uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$, o número real λ é chamado *autovalor* de A se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{1.1}$$

Todo vetor não-nulo $\mathbf{v}$ que satisfaça (1.1) é chamado um *autovetor associado* (ou *correspondente*) ao autovalor λ. Os autovalores também são chamados *valores próprios* ou *valores característicos*, e os autovetores são chamados *vetores próprios* ou *vetores característicos*. Verifica-se que para todo vetor $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, temos $A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w}$, isto é, qualquer múltiplo escalar não-nulo de $\mathbf{v}$ também é um autovetor de A associado ao autovalor λ. De fato,

$$A\mathbf{w} = A(\alpha\mathbf{v}) = \alpha A(\mathbf{v}) = \alpha(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\alpha\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{w}.$$

Vale também observar que na equação (1.1) estaremos sempre considerando o vetor $\mathbf{v}$ na forma de uma matriz coluna $n \times 1$.

É fácil determinar se um vetor é autovetor de uma matriz e também é fácil decidir se um escalar é autovalor de uma matriz. Vejamos como isso é feito nos seguintes exemplos.

Exemplo 1.1.

Se I é a matriz identidade $n \times n$, então o único autovalor é $\lambda = 1$. Qualquer vetor não-nulo $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ é um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 1$, pois

$$I\mathbf{v} = \mathbf{v} = 1\,\mathbf{v}.$$

Exemplo 1.2.

Vamos verificar se os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são autovetores de A, onde $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Solução:

Para identificarmos se $\mathbf{u}$ é autovetor de A devemos verificar se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Temos que

$$A\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\mathbf{u}.$$

Assim, $\mathbf{u} = (1,1)$ é autovetor de A com autovalor correspondente $\lambda = -2$.

No caso do vetor $\mathbf{v}$, temos

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, não existe escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e, consequentemente, $\mathbf{v} = (1,2)$ não é um autovetor da matriz A.

Na **Figura 1.1**, podemos ver os vetores $\mathbf{u} = (1,1)$, $\mathbf{v} = (1,2)$ e a ação geométrica da transformação $w \mapsto Aw$ em cada um deles, onde $w = (x,y)$.

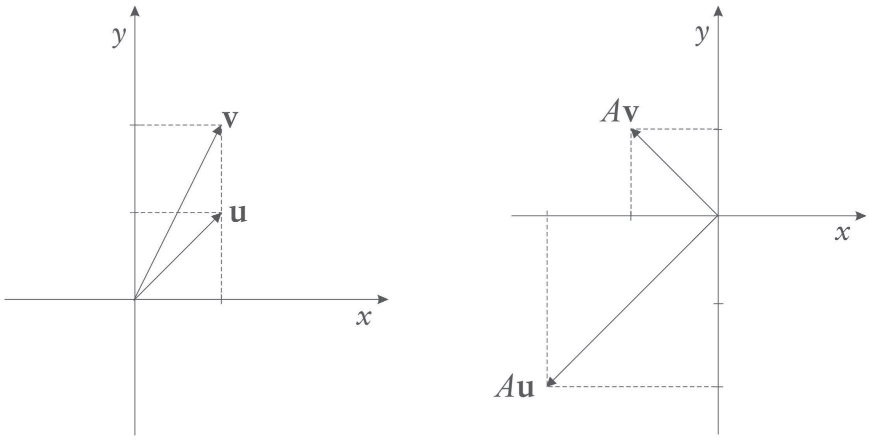


Figura 1.1: Ação geométrica da transformação $w \mapsto Aw$.

Exemplo 1.3.

Verifique se o escalar 5 é um autovalor para a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e determine os autovetores associados a esse autovalor.

Solução:

Usando diretamente a definição de autovetor e autovalor de uma matriz, temos que o escalar 5 é autovalor de A se e somente se a equação

$$A\mathbf{v} = 5\mathbf{v} \tag{1.2}$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mas a equação (1.2) é equivalente à equação

$$A\mathbf{v} - 5I\mathbf{v} = (A-5I)\mathbf{v} = 0. \tag{1.3}$$

Assim, precisamos achar uma solução não-nula para esse sistema linear homogêneo. Primeiramente, calculemos a matriz

$$A - 5I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-5 & 0 \\ 2 & 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Portanto, o sistema linear homogêneo (1.3) pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Para resolver esse sistema linear, use as técnicas de escalonamento de matrizes desenvolvidas no curso de Álgebra Linear I. Escreva a matriz ampliada do sistema linear (1.4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Aplicando as operações elementares em linhas, vemos que a matriz escalonada correspondente à matriz (1.5) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

e o sistema linear homogêneo correspondente a essa matriz é

$$x - 2y = 0. \tag{1.7}$$

Como todo vetor da forma $(2t,t) \in \mathbb{R}^2$, com $t \in \mathbb{R}$, é uma solução para o sistema (1.7), temos que esse sistema possui infinitas soluções e, assim, é possível e indeterminado. Portanto, todo vetor da forma $\mathbf{v} = (2t,t) \in \mathbb{R}^2$, com $t \in \mathbb{R}^*$, é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 5$. De fato, verifica-se que

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10t \\ 5t \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = 5\mathbf{v}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^*$.

No exemplo anterior, podemos observar que a equivalência entre as equações (1.2) e (1.3) vale, claramente, para qualquer escalar λ no lugar de $\lambda = 5$ e para qualquer matriz A. Assim, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor da matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ se e somente se o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \tag{1.8}$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. O conjunto de todas as soluções do sistema (1.8) é o núcleo (ou espaço-nulo) da matriz $A - \lambda I$. Portanto, pelo visto no curso de Álgebra Linear I, este conjunto solução é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ chamado *autoespaço* da matriz A associado ao autovalor λ, denotado por $\mathrm{E}(\lambda)$.

No caso da matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ do Exemplo 1.3, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ é a reta formada por todos os múltiplos escalares do autovetor $\mathbf{v} = (2,1)$. Geometricamente, esse autoespaço é a reta que passa por (2, 1) e pela origem. No Exemplo 1.2, vemos que o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = -2$ é a reta que passa por $(1,1)$ e pela origem, como mostra a **Figura 1.2**.

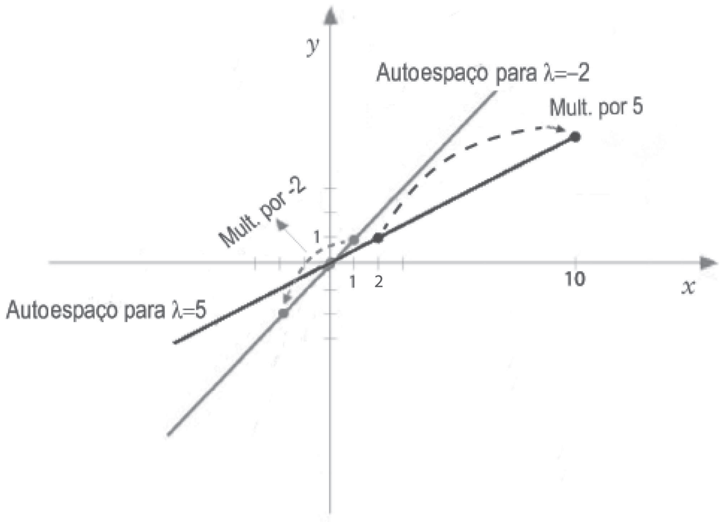


Figura 1.2: Autoespaços para $\lambda = 5$ e $\lambda = -2$.

Exemplo 1.4.

Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$. Verifique que $\lambda = 3$ é um autovalor de A e determine uma base para o autoespaço associado.

Solução:

Para verificar que $\lambda = 3$ é um autovalor de A devemos encontrar uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ do sistema linear homogêneo

$$(A-3I)\mathbf{v} = 0. \tag{1.9}$$

Para ver isso, consideremos primeiramente a matriz

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema (1.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - 4y - 6z = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Novamente, resolvemos este sistema linear usando os métodos e as técnicas estudados na Aula 7 do curso de Álgebra Linear I. A matriz ampliada do sistema linear (1.10) é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

e é fácil ver que a matriz escalonada equivalente a essa matriz ampliada é

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cujo sistema linear homogêneo é dado por

$$x - 2y - 3z = 0. \tag{1.11}$$

Sabemos que as soluções dos sistemas (1.10) e (1.11) são as mesmas. Vemos que o sistema (1.11) possui duas variáveis livres, logo, possui infinitas soluções e, portanto, $\lambda = 3$ é um autovalor da matriz A. Expressando x em termos das variáveis y e z obtemos que

$$x = 2y + 3z.$$

Escrevendo $y = k \in \mathbb{R}$ e $z = t \in \mathbb{R}$, temos que todo vetor não nulo na forma

$$(2k + 3t, k, t) \text{ com } k,\, t \in \mathbb{R}$$

é um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 3$. Assim, o conjunto

$$S = \{(2k + 3t, k, t); k,\, t \in \mathbb{R}\} = \{k\,(2,1,0) + t\,(3,0,1); k,\, t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

é o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$. Vemos que esse subespaço é gerado pelos vetores

$$\mathbf{u} = (2,1,0) \text{ e } \mathbf{v} = (3,0,1)$$

e, sendo linearmente independentes, formam uma base para o subespaço S. Geometricamente, o subespaço S representa o plano do $\mathbb{R}^3$ que passa pela origem e é gerado pelos dois autovetores $\mathbf{u} = (2,1,0)$ e $\mathbf{v} = (3,0,1)$.

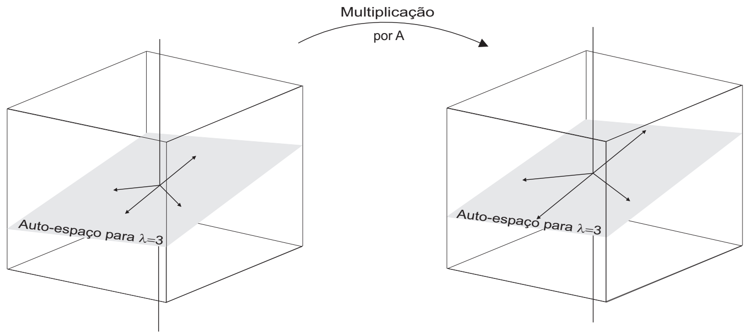


Figura 1.3: A age como uma expansão no autoespaço S.

Observe, neste exemplo, que a imagem de qualquer elemento não-nulo $w \in S$ pela ação da matriz A é novamente um elemento do autoespaço S, isto é, um autovetor de A associado ao autovalor $\lambda = 3$. De fato, sendo $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ base do autoespaço S, temos que existem escalares $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$$

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são autovalores de S, associados ao autovalor $\lambda = 3$, temos

$$\begin{aligned} Aw &= A(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = A(a\mathbf{u}) + A(b\mathbf{v}) \\ &= aA(\mathbf{u}) + bA(\mathbf{v}) = 3a\mathbf{u} + 3b\mathbf{v} \\ &= 3(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = 3\mathbf{w} \in S. \end{aligned}$$

Como $A\mathbf{w} \in S$ para todo $\mathbf{w} \in S$, diz-se que o autoespaço S é um *autoespaço invariante* pela ação da matriz A.

Exercício 1.1.

1. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ são autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Determine os autovalores correspondentes. Este exercício mostra que, apesar de o vetor nulo não poder ser autovetor, é possível ter autovalor igual a zero.

2. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

3. Verifique se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ é autovetor da matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Caso seja, determine o autovalor correspondente.

4. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$ com autovalor $\lambda = 10$, determine uma base para o autoespaço associado a esse autovalor.

5. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$. Verifique se $\lambda = 2$ é um autovalor de A e determine uma base para o autoespaço associado a esse autovalor.

6. Mostre que se λ é um autovalor correspondente ao autovetor $\mathbf{v}$, então ele é único, isto é, não existe escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \lambda$, tal que $A\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v}$.

Aula 2

Autovetores e Autovalores de Matrizes – Casos Especiais

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. reconhecer casos especiais de autovalores;
2. caracterizar a existência de autovalor zero;
3. familiarizar-se com demonstrações envolvendo autovalores e autovetores.

AUTOVETORES E AUTOVALORES DE MATRIZES – CASOS ESPECIAIS

Na Aula 1, vimos os conceitos de autovalor, autovetor e autoespaço. Nesta aula, vamos continuar a explorar essa conceituação em exemplos e casos particulares muito importantes.

No primeiro exemplo, a matriz A é triangular superior e veremos que os autovalores são facilmente calculados.

Exemplo 2.1.

Calcule os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Novamente, pela definição, temos que o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor da matriz A se e somente se o sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0 \tag{2.1}$$

possui uma solução não-nula $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. O sistema linear (2.1) pode ser rescrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} (1-\lambda)x + 6y + 2z = 0 \\ (2-\lambda)y + z = 0 \\ (3-\lambda)z = 0 \ . \end{array} \right. \tag{2.2}$$

Sabemos que o sistema (2.2) possui uma solução não-nula $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se e somente se existe uma variável livre. É fácil ver que isso acontece se e somente se pelo menos um dos coeficientes contendo λ é igual a zero (um dos elementos da diagonal principal da matriz associada é zero). E isso, por sua vez, acontece se e somente se λ for igual a 1, 2 ou 3, que são exatamente os valores da diagonal principal da matriz A.

Na verdade, este procedimento também é válido no caso em que a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz triangular inferior. Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.

Os autovalores de uma matriz triangular (superior ou inferior) são os elementos de sua diagonal principal.

2

No próximo teorema, veremos em que condições uma matriz possui algum autovalor igual a zero.

Teorema 2.2.

Uma matriz A de ordem n tem autovalor igual a zero se e somente se A é uma matriz não-inversível.

Demonstração

Usando as definições de autovalor e autovetor, sabemos que 0 é um autovalor da matriz A se e somente se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v}$ tal que

$$A\mathbf{v} = 0\mathbf{v}. \tag{2.3}$$

O sistema linear (2.3) é claramente equivalente ao sistema homogêneo $n \times n$

$$A\mathbf{v} = 0. \tag{2.4}$$

Do curso de Álgebra Linear I, o sistema (2.4) possui solução não-nula se e somente se $\det(A) = 0$. E $\det(A) = 0$ se e somente se a matriz A é não-inversível.

Lembre que $\det(A)$ denota o determinante da matriz A.

Exemplo 2.2.

Calcule os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Pelo Teorema 2.1, os autovalores de A são os elementos da diagonal principal, ou seja, os autovalores são 0, 1 e 5. Observe também que, sendo 0 um autovalor de A, pelo Teorema 2.2 a matriz A é não-inversível.

Teorema 2.3.

Se λ é um autovalor de uma matriz A, então λ^k é autovalor da matriz A^k para todo $k \in \mathbb{N}^*$.

Demonstração

Pela definição, se λ é autovalor da matriz A, então existe vetor não-nulo v tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{2.5}$$

Multiplicando a equação (2.5) por A, temos

$$A(A\mathbf{v}) = A(\lambda\mathbf{v}),$$

o que nos dá

$$A^2\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v} = \lambda(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^2\mathbf{v},$$

ou seja,

$$A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}. \tag{2.6}$$

Obtemos, assim, que λ^2 é um autovalor da matriz A^2 com autovetor correspondente $\mathbf{v}$. Analogamente, de (2.6), obtemos que

$$A^3\mathbf{v} = \lambda^3\mathbf{v},$$

e isso significa que λ^3 é autovalor da matriz A^3 com autovetor correspondente $\mathbf{v}$. Continuando esse procedimento, obtemos que

$$A^k\mathbf{v} = \lambda^k\mathbf{v} \;\text{ para todo } k \in \mathbb{N}^*.$$

Assim, λ^k é autovalor da matriz A^k com o mesmo autovetor associado $\mathbf{v}$.

Exemplo 2.3.

Calcule os autovalores de uma matriz A que satisfaz $A^2 = 0$, isto é, A^2 é a matriz nula.

Solução:

Se λ é um autovalor da matriz A, então, pelo Teorema 2.3, λ^2 é um autovalor da matriz A^2 e, portanto, existe vetor não-nulo $\mathbf{v}$ tal que $A^2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v}$. Mas $A^2 = 0$ é a matriz nula, então

$$\lambda^2\mathbf{v} = 0,$$

e, como $\mathbf{v}$ é um vetor não-nulo, então é necessário que $\lambda^2 = 0$ e, portanto, $\lambda = 0$. Assim, obtivemos o resultado que afirma que, se uma matriz A é tal que $A^2 = 0$, então seu único autovalor é $\lambda = 0$.

Uma das propriedades mais importantes dos autovalores é apresentada no próximo teorema e sua demonstração ilustra um cálculo que é típico de autovalores e autovetores.

Teorema 2.4.

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k$ autovetores de uma matriz A, associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, respectivamente. Então o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ é linearmente independente.

Este teorema será empregado em outras aulas mais à frente.

Demonstração

Sendo $\mathbf{v}_1$ vetor não-nulo, é claro que o conjunto unitário $\{\mathbf{v}_1\}$ é linearmente independente. Vamos estabelecer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ também é linearmente independente. Sejam c_1 e c_2 constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = 0. \tag{2.7}$$

Vamos mostrar que $c_1 = c_2 = 0$ e, consequentemente, que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

Multiplicando a equação (2.7) por λ_2, obtemos

$$c_1\lambda_2\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = 0. \tag{2.8}$$

Multiplicando também a equação (2.7) por A, e usando que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$ e $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) &= A(c_1\mathbf{v}_1) + A(c_2\mathbf{v}_2) \\ &= c_1A(\mathbf{v}_1) + c_2A(\mathbf{v}_2) \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2\,, \end{aligned}$$

enquanto para o lado direito temos $A0 = 0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (2.7) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = 0. \tag{2.9}$$

Subtraindo a equação (2.9) da equação (2.8), vemos que as segundas parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_1 = 0.$$

Como $\mathbf{v}_1$ é vetor não-nulo, então é necessário que $c_1(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$. E como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, segue que $c_1 = 0$. Substituindo esse valor de volta na equação (2.7), obtemos $c_2\mathbf{v}_2 = 0$ e, como $\mathbf{v}_2$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_2 = 0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é linearmente independente.

Vamos agora dar o passo seguinte, isto é, estabelecer que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto linearmente independente. Sejam c_1 , c_2 e c_3 constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{2.10}$$

Se mostrarmos que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, concluímos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto de vetores linearmente independentes.

Multiplicando a equação (2.10) por λ_3, obtemos

$$c_1\lambda_3\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_3\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{2.11}$$

Multiplicando a equação (2.10) também por A, e usando que $A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1$, $A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2$ e $A\mathbf{v}_3 = \lambda_3\mathbf{v}_3$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned} A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) &= A(c_1\mathbf{v}_1) + A(c_2\mathbf{v}_2) + A(c_3\mathbf{v}_3) \\ &= c_1A(\mathbf{v}_1) + c_2A(\mathbf{v}_2) + c_3A(\mathbf{v}_3) \\ &= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3\,, \end{aligned}$$

enquanto para o lado direito temos $A0 = 0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (2.10) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + c_3\lambda_3\mathbf{v}_3 = 0. \tag{2.12}$$

Subtraindo a equação (2.12) da equação (2.11), vemos que as terceiras parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_3-\lambda_1)\mathbf{v}_1+c_2(\lambda_3-\lambda_2)\mathbf{v}_2=0.$$

Como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, então é necessário que $c_1(\lambda_3-\lambda_1)=0$ e $c_2(\lambda_3-\lambda_2)=0$. E como $\lambda_3 \neq \lambda_1$ e $\lambda_3 \neq \lambda_2$, segue que $c_1=c_2=0$. Substituindo esses valores de volta na equação (2.10), obtemos $c_3\mathbf{v}_3=0$ e, como $\mathbf{v}_3$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_3=0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

Assim, sabendo que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ é linearmente independente, vamos mostrar, da mesma forma como foi feito nos casos anteriores, que $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n,\mathbf{v}_{n+1}\}$ também é linearmente independente. Sejam $c_1,\ldots,c_n,c_{n+1}$ constantes tais que

$$c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{2.13}$$

Multiplicando a equação (2.13) por λ_3 obtemos

$$c_1\lambda_{n+1}\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\lambda_{n+1}\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{2.14}$$

Multiplicando a equação (2.13) também por A, e usando que $A\mathbf{v}_1=\lambda_1\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_{n+1}=\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}$, obtemos, para o lado esquerdo da equação, que

$$\begin{aligned}
A(c_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}) &= A(c_1\mathbf{v}_1)+\ldots+ \\
&\quad +A(c_n\mathbf{v}_n)+A(c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}) \\
&= c_1A(\mathbf{v}_1)+\ldots+ \\
&\quad +c_nA(\mathbf{v}_n)+c_{n+1}A(\mathbf{v}_{n+1}) \\
&= c_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\ldots+ \\
&\quad +c_n\lambda_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1},
\end{aligned}$$

enquanto para o lado direito temos $A0=0$. Assim, o resultado de se multiplicar a equação (2.13) por A é

$$c_1\lambda_1\mathbf{v}_1+\ldots+c_n\lambda_n\mathbf{v}_n+c_{n+1}\lambda_{n+1}\mathbf{v}_{n+1}=0. \tag{2.15}$$

Subtraindo a equação (2.15) da equação (2.14), vemos que as últimas parcelas se cancelam, sobrando

$$c_1(\lambda_{n+1}-\lambda_1)\mathbf{v}_1+\ldots+c_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\mathbf{v}_n=0.$$

Como $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ são linearmente independentes, então é necessário que $c_1(\lambda_{n+1} - \lambda_1) = 0, \ldots, c_n(\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$. E como $\lambda_{n+1} \neq \lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \neq \lambda_n$, segue que $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Substituindo esses valores de volta na equação (2.13), obtemos $c_{n+1}\mathbf{v}_{n+1} = 0$ e, como $\mathbf{v}_{n+1}$ também é vetor não-nulo, então é necessário que $c_n = 0$. Assim, concluímos que $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n+1}\}$ é linearmente independente.

Exercício 2.1.

1. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine seus autovalores e uma base para o autoespaço associado a cada autovalor.
2. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$, determine seus autovalores e uma base para o autoespaço associado a cada autovalor.
3. Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcule os autovalores das matrizes A^2 e A^3.
4. Mostre que A e A^t têm os mesmos autovalores.
5. Dada a matriz A, $n \times n$, mostre que se λ^2 é um autovalor não-negativo de A^2, então λ ou $-\lambda$ é um autovalor para A.

Aula 3

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o conceito de polinômio característico de uma matriz;
2. compreender a relação entre as raízes do polinômio característico e os autovalores de uma matriz;
3. desenvolver habilidades para calcular autoespaços associados a autovalores de uma matriz.

POLINÔMIO CARACTERÍSTICO

Pré-requisito: Sistema linear homogêneo (Álgebra Linear I).

Nesta aula, apresentaremos uma fórmula sistemática de calcular os autovalores de uma matriz quadrada de ordem n. A cada matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ associaremos um polinômio que tem a propriedade de suas raízes serem exatamente os autovalores de A. Antes de apresentarmos formalmente esse polinômio, vejamos, através de um exemplo, como ele surge naturalmente.

Exemplo 3.1.

Determinar os autovalores de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ e seus respectivos autovetores associados.

Solução:

Queremos encontrar os números reais λ e todos os vetores não-nulos $\mathbf{v} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \tag{3.1}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

A equação (3.2) representa o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \lambda x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 = \lambda x_2, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} (\lambda - 1)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (\lambda - 4)x_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.3}$$

As equações anteriores (3.3) formam um sistema linear homogêneo de duas equações e duas incógnitas. Como já foi visto no curso de Álgebra Linear I, o sistema linear homogêneo (3.3) possui solução não-nula (x_1, x_2) se e somente se o determinante de sua matriz associada for nulo, ou seja, se e somente se

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.4}$$

Isto significa que

$$(\lambda - 1)(\lambda - 4) + 2 = 0,$$

ou ainda,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0, \tag{3.5}$$

ou também,

$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0.$$

Portanto, quando esta última equação é satisfeita λ assume os valores 2 ou 3. Assim, $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$ são os autovalores da matriz A.

Para encontrarmos os autovetores $\mathbf{v} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, formamos o sistema

$$A\mathbf{v} = 2\mathbf{v},$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

o que nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_1 \\ -2x_1 + 4x_2 = 2x_2 \end{cases}$$

ou ainda,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Observe que poderíamos ter obtido este último sistema linear homogêneo substituindo simplesmente $\lambda = 2$ na equação (3.3). Escalonando o sistema, obtemos que as soluções do sistema homogêneo (3.6) são

$$x_1 = x_2 \;\text{ e } x_2 = t,\; \text{sendo } t \;\text{ qualquer valor real}.$$

Portanto, todos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são dados por $\mathbf{v} = (t, t)$, sendo t um número real não nulo qualquer. Assim, todos esses autovetores são múltiplos do vetor (1, 1). Em particular, $\mathbf{v}_1 = (1, 1)$ é um autovetor associado a $\lambda_1 = 2$.

Analogamente, para encontrarmos os autovetores associados com o autovalor $\lambda_2 = 3$ obtemos, de (3.3), o sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} (3-1)x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 + (3-4)x_2 = 0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Todas as soluções deste sistema linear homogêneo são dadas por

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 \text{ e } x_2 = t \text{ qualquer valor real.}$$

Portanto, os autovetores de A associados ao autovetor $\lambda_2 = 3$ são dados por $\left(\frac{t}{2}, t\right)$ sendo t um número real não nulo qualquer. Assim, todos esses autovetores são múltiplos do vetor (1, 2). Em particular, $\mathbf{v}_2 = (1,2)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$.

Observe que o determinante (3.4), do exemplo anterior, transformou a equação matricial $(\lambda I - A)\mathbf{v} = 0$, que contém duas incógnitas, λ e v, na equação polinomial $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, que tem uma variável só. Nos exemplos apresentados na aula anterior, calculamos os autovalores de uma matriz por inspeção, enquanto no exemplo acima procedemos de uma forma mais sistemática. Usaremos o processo apresentado neste exemplo como o método padrão para determinar os autovalores de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Definição 3.1.

Seja $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. O determinante

$$p(x) = \det(xI_n - A) = \begin{vmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3.8}$$

é chamado de *polinômio característico* da matriz A.

No Exemplo 3.1, o polinômio característico da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ é

$$p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = x^2 - 5x + 6.$$

Como $p(x) = (x-2)(x-3)$, vemos que 2 e 3 são as raízes do polinômio característico e, também, os autovalores da matriz A.

Exemplo 3.2.

Determine o polinômio característico e os autovalores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solução:

Temos que o polinômio característico de A é dado por

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x-5 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & x-3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & x-3 \end{vmatrix}.$$

Como a matriz $xI_4 - A$ é triangular superior, sabemos que seu determinante é igual a

$$p(x) = (x-5)(x-5)(x-3)(x-3) = (x-3)^2(x-5)^2.$$

Portanto, as raízes do polinômio característico de A são 3, 3, 5 e 5, que são exatamente os autovalores da matriz A. Dizemos, nesse caso, que o autovalor 5 tem *multiplicidade algébrica* 2, pois o fator $(x-5)$ aparece duas vezes como fator do polinômio $p(x)$. Analogamente para o autovalor $\lambda = 3$.

Definição 3.2.

Seja A uma matriz de ordem n com autovalor λ.

1. A *multiplicidade algébrica* do autovalor λ é a sua multiplicidade como raiz do polinômio característico $p(x) = \det(xI_n - A)$.

2. O *autoespaço* associado ao autovalor λ, denotado por $E(\lambda)$, é o subespaço gerado por todos os autovetores associados a λ.

3. A *multiplicidade geométrica* do autovalor λ é a dimensão do autoespaço $E(\lambda)$.

No Exemplo 3.1, vimos que o polinômio característico de uma matriz 2×2 é um polinômio de grau 2 e, no Exemplo 3.2, o polinômio característico de uma matriz 4×4 é um polinômio de grau 4. Em geral, é verdade que para uma matriz de ordem n o polinômio característico tem grau n. Vemos isso facilmente quando desenvolvemos o determinante (3.8); observe que o termo do polinômio característico de A contendo x^n provém do produto dos elementos da diagonal principal, ou seja, de

$$(x - a_{11})(x - a_{22}) \ldots (x - a_{nn}).$$

Observe que o coeficiente do termo de mais alto grau, aquele contendo x^n, é igual a 1 e, por isso, dizemos que o polinômio é *mônico*.

Pela forma como foi definido o polinômio característico, podemos concluir o resultado a seguir.

Teorema 3.1.

Um escalar λ é autovalor de uma matriz A de ordem n se e somente se λ é uma raiz do polinômio característico de A, isto é, se e somente se λ satisfaz a equação $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Sendo assim, para encontrarmos os autovalores de uma matriz A devemos encontrar as raízes do seu polinômio característico. E, como no Exemplo 3.1, os autovetores correspondentes são obtidos substituindo o valor de λ na equação $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ e resolvendo o sistema linear homogêneo

$$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = 0.$$

Exemplo 3.3.

Determine bases para os autoespaços da matriz A do Exemplo 3.2, e obtenha a multiplicidade geométrica de cada autovalor.

Solução:

Vimos que o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

é dado por

$$p(x) = (x-5)^2(x-3)^2.$$

Portanto, os autovalores de A são $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = 3$ e $\lambda_4 = 3$. Neste caso, os dois autovalores distintos têm multiplicidade algébrica 2. Vamos determinar os autovetores associados a cada um deles.

Para obter os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 5$, resolvemos o sistema linear homogêneo

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Considerando $\mathbf{v} = (x,y,z,t)$, o sistema anterior pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz ampliada do sistema, obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e a solução geral deste sistema é dada pelos vetores da forma

$$\mathbf{v} = (-z-2t, z+t, z, t) \text{ com } z, t \in \mathbb{R}.$$

Observe que, neste caso, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ tem duas variáveis livres, z e t, e, portanto, tem dimensão 2. Considerando $z = -1$ e $t = 0$ e, depois, $z = 0$ e $t = -1$, vemos que os vetores $\mathbf{v}_1 = (1,-1,-1,0)$ e $\mathbf{v}_2 = (2,-1,0,-1)$ pertencem ao autoespaço associado a $\lambda = 5$ e, como são linearmente independentes, formam uma base para esse autoespaço. Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 5$ também é igual a 2, ou seja, igual à multiplicidade algébrica.

Agora, para determinarmos os autovetores $\mathbf{v} = (x,y,z,t)$ associados ao autovalor $\lambda = 3$, devemos resolver o sistema homogêneo

$$(3I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Novamente, este sistema homogêneo é equivalente ao sistema

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e, escalonando a matriz ampliada desse sistema, obtemos o sistema linear equivalente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Vemos, facilmente, que a solução geral deste sistema é dada pelos vetores da forma

$$\mathbf{v} = (0, 0, z, t) \text{ com } z, t \in \mathbb{R}.$$

Outra vez, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ tem dimensão 2. Os autovetores

$$\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1, 0) \text{ e } \mathbf{v}_4 = (0, 0, 0, 1)$$

são linearmente independentes e, portanto, formam uma base do autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$. Logo, a multiplicidade geométrica de $\lambda = 3$ também é igual a 2, coincidindo mais uma vez com a multiplicidade geométrica.

Exercício 3.1.

1. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

5. Determine os valores de a, b, c, d, e e f, de modo que $\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0)$ sejam autovetores da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, e dê os autovalores associados a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

Aula 4

CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. obter autovalores a partir do polinômio característico;
2. observar que nem sempre a multiplicidade algébrica de um autovalor coincide com sua multiplicidade geométrica e que, geralmente, a multiplicidade geométrica é menor ou igual à multiplicidade algébrica;
3. observar que existem matrizes que não possuem autovalores nem autovetores.

CÁLCULO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES

Pré-requisito: Aula 3; Teorema 2.4 da Aula 2.

No Exemplo 3.3, da Aula 3, vimos o caso de autovalores com multiplicidade algébrica igual à multiplicidade geométrica, isto é, o número de vezes que o autovalor comparece como raiz do polinômio característico é igual à dimensão do autoespaço correspondente. Consequentemente como a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica eram iguais a 2, pudemos obter, em cada um dos dois casos, dois autovetores linearmente independentes, formando uma base do autoespaço correspondente. Infelizmente, isso nem sempre é possível, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 4.1.

Determine os autovalores e os autovetores da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifique a relação entre a multiplicidade algébrica e a multiplicidade geométrica para cada autovalor.

Solução:

Como a matriz é triangular, vimos que seus autovalores são exatamente os elementos da diagonal principal ou, analogamente, observe que o polinômio característico de A é

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-5 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & x-3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & x-5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$p(x) = x(x-3)(x-5)^2.$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 0, 3, 5 e 5. Os autovalores 0 e 3 têm multiplicidade algébrica 1 enquanto o autovalor 5 aparece com multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = 0$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\, y,\, z,\, t)$

satisfazem o sistema linear

$$(0I_4 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 0$ são da forma

$$\mathbf{v} = \left(\frac{-t}{5},\ t,\ t,\ t\right),\ \text{com } t \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 0$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{-1}{5},\ 1,\ 1,\ 1\right)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ satisfazem o sistema homogêneo

$$(3I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

que é equivalente ao sistema linear homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x,\ 0,\ 0),\ \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 3$ tem dimensão 1 e é gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica é igual a 1, coincidindo com o valor da multiplicidade algébrica.

Finalmente, resolvendo o sistema linear homogêneo

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0,$$

obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 5$. É fácil ver que este sistema é equivalente a

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

de onde obtemos soluções da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 0,\ 0,\ 0),\ \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Assim, o autoespaço associado ao autovalor $\lambda = 5$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_3 = (1,\ 0,\ 0,\ 0)$. Portanto, embora o autovalor $\lambda = 5$ tenha multiplicidade algébrica 2, sua multiplicidade geométrica é 1. **A multiplicidade geométrica de um autovalor é sempre menor ou igual à sua multiplicidade algébrica**.

Observe que os autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$, associados aos autovalores 0, 3 e 5, respectivamente, são linearmente independentes, como afirma o Teorema 2.4 da Aula 2.

Vimos que para obtermos os autovalores de uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ precisamos encontrar as raízes do seu polinômio característico. O problema de encontrar raízes de um polinômio de grau n não é um problema fácil. Existem muitos métodos para se obter aproximações numéricas das raízes reais de um polinômio, alguns deles mais eficientes do que outros.

Enunciaremos dois resultados gerais a respeito de raízes reais de polinômios.

Teorema 4.1.

Dado o polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, podemos afirmar que:

1. A soma das raízes de $p(x)$ é igual a $-a_{n-1}$ e o seu produto é igual a $(-1)^n a_0$.

2. Se $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, então toda raiz racional do polinômio $p(x)$ é inteira. Mais ainda, se r é uma raiz inteira de $p(x)$ então r é divisor de a_0.

Assim, para encontrarmos as possíveis raízes racionais de um polinômio mônico $p(x)$ com coeficientes inteiros, é suficiente procurar entre os divisores inteiros do termo constante a_0. É claro que $p(x)$ pode muito bem ter apenas raízes irracionais ou complexas. No entanto, como este é um primeiro curso sobre autovalores, todos os polinômios característicos considerados terão apenas coeficientes inteiros e suas raízes reais, quando existirem, serão inteiras. Portanto, cada uma dessas raízes será um divisor do termo constante de $p(x)$.

Exemplo 4.2.

Determine os autovalores de uma matriz A, de ordem 3, cujo polinômio característico é $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

Solução:

Sabemos que os autovalores de A são as raízes de $p(x)$. Mas, pelo que vimos, os candidatos a raízes inteiras, ou mesmo racionais, de $p(x)$ são os divisores do termo constante, que é -6, ou seja, são ± 1, ± 2, ± 3 e ± 6. Agora, é preciso testá-las para saber quais de fato são raízes. Como $p(-1) = -24 \neq 0$, então -1 não é raiz de $p(x)$. Como $p(1) = 0$, temos que 1 é raiz de $p(x)$ e, portanto, o polinômio $(x-1)$ divide $p(x)$. Efetuando a divisão de $p(x)$ por $(x-1)$, obtemos

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6).$$

As outras duas raízes de $p(x)$ são as raízes do polinômio quadrático $x^2 - 5x + 6$, a saber, 2 e 3. Observe que são mais dois divisores de -6. Assim, 1, 2 e 3 são as raízes de $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ e, portanto, são os autovalores da matriz A.

Exemplo 4.3.

Determine os autovalores e uma base de autovetores para cada autoespaço correspondente da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Verifique, também, para cada autovalor, se a multiplicidade algébrica é igual à geométrica.

Solução:

Primeiramente, obtemos o polinômio característico da matriz A:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ 0 & x-3 & 1 \\ -2 & -1 & x-3 \end{vmatrix} = x^3 - 8x^2 + 20x - 16.$$

Os candidatos à raiz inteira, ou mesmo racional, desse polinômio são os divisores de -16: ± 1, ± 2, ± 4, ± 8 e ± 16. Agora, para saber se algum desses valores é raiz do polinômio característico, é preciso testá-los. Como $p(-1) = -45$, então -1 não é raiz de $p(x)$. Como $p(1) = -3$, então 1 também não é raiz. Agora, $p(2) = 0$, logo 2 é raiz do polinômio característico. Dividindo $p(x)$ por $(x-2)$, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-2)(x^2-6x+8) \\ &= (x-2)(x-2)(x-4) \\ &= (x-2)^2(x-4)\ . \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 2, 2 e 4. O autovalor 4 tem multiplicidade algébrica 1, enquanto o autovalor 2 tem multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = 4$, temos que os autovetores associados $v = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(4I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 4$ são da forma

$$\mathbf{v} = (z,\ -z,\ z),\ \text{com } z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 4$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,\ -1,\ 1)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (-z,\ z,\ z),\ \text{com}\ z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ -1,\ -1)$. Portanto, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, menor que sua multiplicidade algébrica.

No entanto, observe que os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes.

Exemplo 4.4.

Determine os autovalores e uma base de autovetores para cada autoespaço correspondente da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Verifique, também, se as multiplicidades algébricas e geométricas coincidem.

Solução:

Primeiramente, obtemos o polinômio característico da matriz A:

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ 2 & x+3 & -1 \\ -2 & -2 & x+2 \end{vmatrix} = x^3 + 4x^2 + 5x + 2.$$

Os candidatos à raiz inteira, ou mesmo racional, desse polinômio são os divisores de 2: ± 1 e ± 2. Como os coeficientes de $p(x)$ são todos positivos, podemos descartar os candidatos positivos 1 e 2. Agora, é fácil verificar que $p(-1) = 0$, ou seja, -1 é raiz de $p(x)$. Dividindo $p(x)$ por $(x+1)$, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)(x^2+3x+2) \\ &= (x+1)(x+1)(x+2) \\ &= (x+1)^2(x+2)\ . \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são -1, -1 e -2. O autovalor -2 tem multiplicidade algébrica 1 enquanto o autovalor -1 tem multiplicidade algébrica 2. Vamos, agora, calcular os autovetores associados em cada caso.

Para o autovalor $\lambda = -2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-2I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (z,\ -z,\ z) \text{ com } z \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = -2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,\ -1,\ 1)$. Ou seja, a multiplicidade geométrica também é igual a 1.

Analogamente, para o autovalor $\lambda = -1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = -1$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ y,\ 2x+2y) \text{ com } x \in \mathbb{R}^* \text{ ou } y \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = -1$ tem dimensão 2, sendo gerado pelos autovetores $\mathbf{v}_2 = (1,\ 0,\ 2)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,\ 1,\ 2)$. Portanto, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 2, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Observe que os autovetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são, mais uma vez, linearmente independentes.

Também é interessante observar que uma matriz não precisa ter nenhum autovalor (real) e, consequentemente, nenhum autovetor. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 4.5.

Verifique que a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ não possui autovalores.

Solução:

O polinômio característico dessa matriz é

$$p(x) = \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{vmatrix} = x^2 + 1.$$

Como o polinômio $p(x) = x^2 + 1$ não possui raízes reais (suas raízes são i e -i), então, pelo Teorema 3.1 da Aula 3, segue que a matriz A não possui autovalores. Não havendo autovalores, então não há também autovetores. Porém, se considerarmos o conjunto dos escalares como sendo os números complexos, então esta matriz teria dois autovalores complexos, a saber, i e -i. No entanto, não trataremos de autovalores complexos neste curso introdutório.

Exercício 4.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

4. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine os autovalores e bases para os autoespaços correspondentes da matriz A.

   b. Determine as multiplicidades algébrica e geométrica de cada autovalor.

5. Seja A uma matriz de ordem n. Prove que A e sua transposta A^t têm o mesmo polinômio característico.

Aula 5

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender a conceituação de matrizes semelhantes;
2. compreender a conceituação de matriz diagonalizável;
3. observar a relação entre matriz diagonalizável, autovalores e autovetores.

DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Pré-requisitos: Matriz mudança de base (de Álgebra linear I); Teorema 2.4, da Aula 2; Teorema 4.1, da Aula 4.

Existe uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e que, também, se torna importante no estudo de autovalores. Trata-se da relação de semelhança de matrizes.

Definição 5.1.

Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. As matrizes A e B são *semelhantes* se existe uma terceira matriz inversível $P \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $B = P^{-1}AP$ ou $A = P^{-1}BP$.

Exemplo 5.1.

Considere as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = P^{-1}AP$. Determine o polinômio característico, os autovalores e os autovetores das matrizes A e B.

Solução:

Inicialmente, observe que A e B são matrizes semelhantes. Para a matriz A, temos

$$\begin{aligned} p_A(x) &= \det(xI_2 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ 2 & x-4 \end{vmatrix} = (x-1)(x-4)+2 = \\ &= x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)\,. \end{aligned}$$

Portanto, a matriz A possui dois autovalores distintos: 2 e 3.

Para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (1,1)$.

Para o autovalor $\lambda = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 2x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 3$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ 2)$.

Quanto à matriz B, temos

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sendo B uma matriz triangular inferior, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, a saber, 2 e 3. Seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p_B(x) &= \det(xI_2 - B) = \begin{vmatrix} x-3 & 0 \\ 3 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= (x-3)(x-2) \\ &= x^2 - 5x + 6\,. \end{aligned}$$

Para o autovalor $\lambda = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_2 - B)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 2$ são da forma

$$\mathbf{v} = (0,\ y) \text{ com } y \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 2$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_1 = (0,\ 1)$.

Para o autovalor $\lambda = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - B)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores associados ao autovalor $\lambda = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ -3x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, o autoespaço associado a $\lambda = 3$ tem dimensão 1, sendo gerado pelo autovetor $\mathbf{v}_2 = (1,\ -3)$.

Observe que as duas matrizes, A e B, têm os mesmos autovalores e o mesmo polinômio característico. Isto é uma propriedade geral de matrizes semelhantes. No entanto, os autoespaços não precisam coincidir, como este exemplo mostra.

Teorema 5.1.

Sejam A e B matrizes semelhantes. Então A e B têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.

Demonstração

Sendo A e B matrizes semelhantes, existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Assim,

$$\begin{array}{rcl} p_B(x) & = & \det(xI - B) \\ & = & \det(xP^{-1}IP - P^{-1}AP) \\ & = & \det(P^{-1}(xI - A)P) \\ & = & \det(P^{-1})\det(xI - A)\det(P) \\ & = & \det(xI - A) \\ & = & p_A(x)\,. \end{array}$$

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores.

Vejamos, agora, o conceito de diagonalização de matrizes.

Definição 5.2.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é dita *diagonalizável* se for semelhante a uma matriz diagonal. Nesse caso, também dizemos que a matriz A pode ser diagonalizada.

Exemplo 5.2.

Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ do Exemplo 5.1 é diagonalizável.

Solução:

Vimos que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ tem como autovetores $\mathbf{v}_1 = (1,1)$, associado ao autovalor $\lambda = 2$, e $\mathbf{v}_2 = (1,2)$, associado ao autovalor $\lambda = 3$. Como os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são linearmente independentes, veja o Teorema 2.4 da Aula 2, eles formam uma base de autovetores do $\mathbb{R}^2$. Considere a base canônica, $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$, e observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= (1,1) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 1 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_2 &= (1,2) = 1 \cdot \mathbf{e}_1 + 2 \cdot \mathbf{e}_2\,, \end{aligned}$$

ou seja, a matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas componentes de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, é a matriz mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

É hora de rever a matriz mudança de base, do curso de Álgebra Linear I.

Agora, temos que a matriz

$$\begin{aligned} D &= P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma matriz diagonal semelhante à matriz A, isto é, a matriz A é diagonalizável. Veja que a matriz diagonal D obtida tem os autovalores da matriz A em sua diagonal principal.

Observe que também podemos expressar a matriz A em função da matriz diagonal D. Multiplicando a equação $D = P^{-1}AP$ por P^{-1} do lado direito, obtemos

$$DP^{-1} = P^{-1}A(PP^{-1}) = P^{-1}AI = P^{-1}A,$$

e multiplicando $DP^{-1} = P^{-1}A$ por P à esquerda, obtemos

$$\begin{array}{rcl} (PP^{-1})A & = & PDP^{-1} \\ IA & = & PDP^{-1} \\ A & = & PDP^{-1}. \end{array}$$

Uma das vantagens de termos uma matriz A semelhante a uma matriz diagonal D é que as potências de A se tornam mais fáceis de serem calculadas. De fato, da equação $A = PDP^{-1}$ obtida anteriormente, temos

$$\begin{array}{rcl} A^2 & = & (PDP^{-1})^2 \\ & = & (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \\ & = & PD(P^{-1}P)DP^{-1} \\ & = & PD^2P^{-1}, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} A^3 & = & A^2A \\ & = & (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) \\ & = & PD^2(P^{-1}P)DP^{-1} \\ & = & PD^3P^{-1}. \end{array}$$

De um modo geral, temos $A^k = PD^kP^{-1}$ para qualquer inteiro positivo k. E sendo a matriz diagonal D dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

temos que

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}.$$

O teorema a seguir fornece condições suficientes para que uma matriz A seja diagonalizável.

Teorema 5.2.

Se uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável.

No Teorema 5.2, a matriz diagonal D, semelhante a A, é formada pelos autovalores de A em sua diagonal principal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

sendo cada autovalor λ_k associado ao k-ésimo vetor $\mathbf{v}_k$ da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. A matriz P, em $D = P^{-1}AP$ ou $A = PAP^{-1}$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^n$, e cujas colunas são formadas pelas componentes dos autovetores, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\ ].$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos da diagonal da matriz D.

Exemplo 5.3.

Mostre que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Vamos verificar se a matriz A tem três autovalores distintos, o que garante, pelo Teorema 2, que A é diagonalizável. Seu polinômio característico é dado por

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 \\ -9 & x-4 & -6 \\ 8 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = x^3 - 3x^2 - x + 3.$$

Pelo Teorema 4.1 da Aula 4, os candidatos a raízes racionais de $p(x)$ são os divisores de -3: ± 1 e ± 3. Verificamos rapidamente que $p(-1) = p(1) = p(3) = 0$, isto é,

$$p(x) = (x+1)(x-1)(x-3),$$

ou seja, os autovalores da matriz A são –1, 1 e 3. Portanto, pelo teorema anterior, a matriz A é diagonalizável e semelhante à matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para obter uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$, precisamos encontrar uma base de autovetores. Para o autovalor $\lambda_1 = -1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 3x,\ -4x),\ \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $\mathbf{v}_1 = (1,\ 3,\ -4)$.

Para o autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ x,\ -2x),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ é $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ -2)$.

Finalmente, para o autovalor $\lambda_3 = 3$, os autovetores associados $\mathbf{v}_3 = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ -x,\ -4x/3),\ \text{com}\ x \in \mathbb{R}.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ é $\mathbf{v}_3 = (3,\ -3,\ -4)$.

Como foi observado antes deste exemplo, a matriz P é obtida posicionando em suas colunas os autovetores $\mathbf{v}_1 = (1, 3, -4)$, $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ -2)$ e $\mathbf{v}_3 = (3,\ -3,\ -4)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Exercício 5.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

   a. Mostre que a matriz A é diagonalizável e determine uma matriz diagonal D correspondente.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

4. Mostre que se A e B são matrizes semelhantes, então $\det(A) = \det(B)$.

Aula 6

CÁLCULO DE MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. apresentar um critério geral de diagonalização de matrizes;
2. observar a existência de matrizes diagonalizáveis com autovalores repetidos;
3. observar a existência de matrizes não diagonalizáveis com autovalores reais.

CÁLCULO DE MATRIZES DIAGONALIZÁVEIS

Nos exemplos da Aula 5, tratamos de matrizes diagonalizáveis $A \in M_n(\mathbb{R})$ que apresentavam n autovalores distintos. Nesta aula, vamos considerar matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$ com autovalores repetidos. No caso de a matriz A apresentar n autovetores linearmente independentes, então a matriz continuará sendo diagonalizável. Caso contrário, a matriz A não será diagonalizável. É o que afirma o próximo teorema.

Teorema 6.1.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é diagonalizável se e somente se a matriz A tem n autovetores linearmente independentes.

Neste teorema, a matriz diagonal D, semelhante a A, é formada pelos autovalores de A em sua diagonal principal,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

sendo cada autovalor λ_k associado ao k-ésimo vetor $\mathbf{v}_k$ da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. A matriz P, em $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica do $\mathbb{R}^n$, cujas colunas são formadas pelos autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \dots \quad \mathbf{v}_n\ ]$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos da diagonal da matriz D.

Observe, no Teorema 6.1, que a existência dos n autovetores linearmente independentes é equivalente à existência de uma base de autovetores para o $\mathbb{R}^n$. Observe, também, que o Teorema 6.1 afirma que, caso a matriz A não admita uma base de autovetores, ou seja, não possua n autovetores linearmente independentes, então a matriz A **não** será diagonalizável.

Exemplo 6.1.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Primeiramente, devemos calcular o polinômio característico de A. Esse polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 1 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)\begin{vmatrix} x & -1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= x(x-1)^2, \end{aligned}$$

ou seja, o polinômio característico da matriz A é

$$p(x) = x(x-1)^2,$$

e, portanto, seus autovalores são 0 e 1, o primeiro com multiplicidade algébrica 1 e o segundo com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades, seus três autovalores são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Para concluir que a matriz A é diagonalizável, precisamos verificar se existem três autovetores linearmente independentes, ou seja, se existe uma base de autovetores para $\mathbb{R}^3$.

Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, não é difícil ver que o sistema linear

$$(0I_3 - A)\mathbf{v} = 0, \tag{6.1}$$

com $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - z = 0\,. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (6.1) são da forma

$$(x,\ 0,\ x) = x(1,\ 0,\ 1),\ \text{com } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0 \tag{6.2}$$

é equivalente ao sistema

$$x - y = 0$$

Assim, todas as soluções do sistema (6.2) são da forma

$$(x, x,\ z) = x(1,\ 1,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1),\ \text{para todo } x, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_2 = (1,\ 1,\ 0)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica do autovalor 1 é igual à sua multiplicidade algébrica, ou seja, igual a 2.

Pelo Teorema 2.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da matriz A.

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

enquanto uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A e que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: a primeira coluna de P é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 0$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

Vejamos, agora, um exemplo de matriz não diagonalizável.

Exemplo 6.2.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

não é diagonalizável.

Solução:

Como a matriz A é matriz triangular superior, seus autovalores são os elementos da diagonal principal, ou seja, 0, 1 e 1. Para o autovalor $\lambda_1 = 0$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x, y, z)$ satisfazem o sistema linear

$$(0I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 0$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,\ 0,\ 0),\ \text{com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ é $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 0)$. Observe que a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 0$ é igual à sua multiplicidade algébrica, que é igual a 1.

No caso do autovalor $\lambda_2 = 1$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ são da forma

$$\mathbf{v} = (0,\ y,\ 0),\ \text{com}\ y \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_2 = (0,\ 1,\ 0)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$. Observe, também, que a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = 1$ é igual a 1, enquanto sua multiplicidade algébrica é igual a 2.

Como a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = 1$ é igual a 1, não existem dois autovetores linearmente independentes associados a esse autovalor. Podemos obter, no máximo, dois autovetores da matriz A que são linearmente independentes: um associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ e outro associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, por exemplo, os autovetores $\mathbf{v}_1 = (1,\ 0,\ 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,\ 1,\ 0)$, respectivamente. Logo, não é possível formar uma base de autovetores para $\mathbb{R}^3$. Portanto, pelo Teorema 6.1, a matriz A não é diagonalizável.

Vejamos mais um exemplo do caso de matriz diagonalizável.

Exemplo 6.3.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonal D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Primeiramente, devemos calcular o polinômio característico de A. Este polinômio característico é dado por

$$p(x) = \det(xI_4 - A) = \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & x-2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & x-5 \end{vmatrix}.$$

Resolvendo o determinante acima, temos

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x-2)\begin{vmatrix} x-4 & -1 & 0 \\ -2 & x-3 & 0 \\ -1 & 1 & x-5 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(x-5)\begin{vmatrix} x-4 & -1 \\ -2 & x-3 \end{vmatrix} \\
&= (x-2)(x-5)[(x-4)(x-3)-2] \\
&= (x-2)(x-5)(x^2-7x+10) \\
&= (x-2)(x-5)(x-2)(x-5)\,.
\end{aligned}
$$

Assim, o polinômio característico da matriz A é

$$p(x) = (x-2)^2(x-5)^2,$$

e, portanto, seus autovalores são 2 e 5, ambos com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades, seus quatro autovalores são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$.

Para concluir que a matriz A é diagonalizável, precisamos verificar se existem quatro autovetores linearmente independentes, ou seja, se existe uma base de autovetores para $\mathbb{R}^4$.

Para o autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z,\ t)$ satisfazem o sistema linear

$$(2I_4 - A)\mathbf{v} = 0, \tag{6.3}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x+t=0 \\ y-2t=0\,. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (6.3) são da forma

$$(-t,\ 2t,\ z,\ t) = t\,(-1,\ 2,\ 0,\ 1) + z\,(0,\ 0,\ 1,\ 0),\ \text{para todo } t, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (-1,\ 2,\ 0,\ 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (0,\ 0,\ 1,\ 0)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 2, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$, os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,\ y,\ z,\ t)$ satisfazem o sistema linear

$$(5I_4 - A)\mathbf{v} = 0, \tag{6.4}$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} x-y=0 \\ z+t=0\,. \end{cases}$$

Assim, todas as soluções do sistema (6.4) são da forma

$$(x,\ x,\ z,\ -z) = x(1,\ 1,\ 0,\ 0) + z(0,\ 0,\ 1,\ -1),\ \text{para todo } x, z \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_3 = (1,\ 1,\ 0,\ 0)$ e $\mathbf{v}_4 = (0,\ 0,\ 1,\ -1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$. Aqui, também, a multiplicidade geométrica do autovalor 5 é igual a 2, novamente coincidindo com o valor de sua multiplicidade algébrica.

Pelo Teorema 2.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovetores da matriz A.

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

enquanto uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A e que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: as primeiras duas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_3 = \lambda_4 = 5$.

Exercício 6.1.

1. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

2. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

   b. Determine uma matriz P tal que $D = P^{-1}AP$.

3. Considere a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Determine se a matriz A é diagonalizável e, caso seja, determine uma matriz diagonal D semelhante a A.

Aula 7

PROCESSO DE DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. descrever o processo de diagonalização de uma matriz através de um procedimento formal;
2. aplicar o procedimento de diagonalização de matrizes apresentado.

PROCESSO DE DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

Pré-requisitos: Determinantes de matriz (Álgebra linear I); Teorema 6.1 da Aula 6; Teorema 4.1 da Aula 4; Teorema 2.4 da Aula 2.

Durante as Aulas 5 e 6, desenvolvemos um processo de diagonalização de matrizes que queremos, agora, formalizar. As condições exigidas devem satisfazer as condições do Teorema 6.1 da Aula 6, ou seja, consideremos uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ com n autovetores linearmente independentes. Então, sabemos que a matriz A é diagonalizável.

O processo de diagonalizar uma matriz A consiste em encontrar uma *matriz diagonalizada* D, semelhante a A, $D = P^{-1}AP$, e a *matriz diagonalizante* P. Descrevemos esse processo nos quatro passos seguintes.

Passo 1: *Determinar os autovalores da matriz A.*

Verifique se a matriz A é uma matriz triangular. Caso seja, então seus autovalores já são os elementos de sua diagonal principal.

Se a matriz A não é triangular, então precisamos calcular seu polinômio característico, que é dado por

$$p(x) = \det(xI_n - A),$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Para o cálculo do polinômio característico, é preciso lembrar do processo de cálculo de determinante de matriz visto no curso de Álgebra Linear I.

Como já sabemos, os autovalores de A são exatamente as raízes do polinômio característico, ou seja, as soluções da equação

$$p(x) = \det(xI_n - A) = 0.$$

Como já foi observado anteriormente, o cálculo das raízes de um polinômio é muito difícil se o grau do polinômio for maior que dois. É preciso salientar que esse método de obter os autovalores de uma matriz, por meio das raízes do seu polinômio característico, não é muito prático devido à necessidade de se calcular um determinante e devido à dificuldade de obter as raízes de um polinômio de grau $n > 2$. No entanto, no decorrer deste curso, todos os polinômios característicos encontrados terão coeficientes inteiros e, na maioria das vezes, suas raízes serão racionais ou mesmo inteiras. Em particular, poderemos aplicar o Teorema 4.1 da Aula 4 para ajudar a encontrar as raízes do polinômio característico.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ os n autovalores da matriz A, ou seja, as n raízes do polinômio característico. Cada autovalor λ comparece nesta relação tantas vezes quanto for sua multiplicidade algébrica, isto é, o número máximo de vezes que o fator $(x-\lambda)$ aparece na fatoração do polinômio característico $p(x)$.

Passo 2: *Determinar uma base de autovetores da matriz A.*

Para cada autovalor λ_k, de multiplicidade n_k, $n_k \leq n$, devemos obter uma base de autovetores para seu autoespaço $E(\lambda_k)$ que, como já foi visto, coincide com o espaço-solução do sistema linear homogêneo

$$(\lambda_k I_n - A)\mathbf{v} = 0.$$

Devemos, assim, obter n_k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ_k. Observe que a dimensão deste subespaço deve ser igual a n_k, isto é, a multiplicidade geométrica do autovalor λ_k deve ser igual à sua multiplicidade algébrica. Lembre que, se não existirem n_k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor λ_k, então a matriz A não é diagonalizável.

Procedendo dessa forma, obtemos uma base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para o $\mathbb{R}^n$, onde cada autovetor $\mathbf{v}_k$ está associado ao autovalor λ_k.

Passo 3: *Montar a matriz diagonalizada D.*

A matriz D é uma matriz diagonal e sua diagonal principal consiste exatamente dos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ da matriz A,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Passo 4: *Montar a matriz diagonalizante P.*

A matriz P, que satisfaz $D = P^{-1}AP$, é a matriz que realiza a mudança de base, da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ para a base canônica de $\mathbb{R}^n$, e cujas colunas são formadas pelas componentes dos autovetores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$, ou seja, a k-ésima coluna de P é formada pelas componentes do k-ésimo autovetor $\mathbf{v}_k$ dessa base. Denotamos essa relação entre a matriz P e os vetores $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ por

$$P = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{v}_n\ ].$$

É muito importante observar que a ordem dos vetores da base de autovetores $\{\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n\}$ determina a ordem das colunas da matriz P e a ordem dos elementos $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ da diagonal principal da matriz D.

Exemplo 7.1.

Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

é diagonalizável. Determine uma matriz diagonalizada D e uma matriz P tais que $D = P^{-1}AP$.

Solução:

Vamos detalhar cada um dos passos sugeridos anteriormente.

Passo 1: *Determinar os autovalores da matriz A.*

Como a matriz A não é matriz triangular, devemos calcular seu polinômio característico para obter os autovalores de A. O polinômio característico da matriz A é dado por

$$p(x) = \det(xI_3 - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & -3 \\ 3 & x+5 & 3 \\ -3 & -3 & x-1 \end{vmatrix},$$

cujo cálculo nos leva a

$$p(x) = x^3 + 3x^2 - 4.$$

Observe que, pelo Teorema 4.1 da Aula 4, os candidatos a raízes racionais do polinômio $p(x)$ são os divisores de -4: ± 1, ± 2 e ± 4. Verificamos rapidamente que $p(1) = 0$, logo, o polinômio $(x-1)$ divide $p(x)$. Efetuando a divisão polinomial, obtemos

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x^2+4x+4) \\ &= (x-1)(x+2)^2. \end{aligned}$$

Portanto, os autovalores da matriz A são 1 e –2, o primeiro com multiplicidade algébrica 1 e o segundo com multiplicidade algébrica 2. Contando as multiplicidades algébricas, seus três autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Passo 2: *Determinar uma base de autovetores da matriz A.*

Para o autovalor $\lambda_1 = 1$, temos que os autovetores associados $v = (x,y,z)$ satisfazem o sistema linear

$$(1I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

ou seja, o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 3 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, ao sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y+z=0\,. \end{cases}$$

Todas as soluções desse sistema são da forma

$$(x,-x,x) = x\,(1,-1,1), \text{ com } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_1 = (1,-1,1)$ é um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$, logo, uma base do autoespaço correspondente. Em particular, a multiplicidade geométrica desse autovalor é igual a 1, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Analogamente, para o autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,y,z)$ satisfazem o sistema linear

$$(-2I_3 - A)\mathbf{v} = 0$$

ou seja, o sistema

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, ao sistema

$$x+y+z=0.$$

Assim, todas as soluções desse sistema são da forma

$$(x,y,-x-y) = x(1,0,-1)+y(0,1,-1), \text{ com } x,y \in \mathbb{R}.$$

Portanto, $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1,-1)$ são dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, formando uma base do autoespaço correspondente. Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$ é igual à sua multiplicidade algébrica, ou seja, igual a 2.

Pelo Teorema 2.4 da Aula 2, autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes. Daí, concluímos que o conjunto de autovetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem que ser linearmente independente, garantindo que a matriz A é, de fato, diagonalizável. Observe que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores da matriz A.

Passo 3: *Montar a matriz diagonalizada D.*

A matriz diagonal D, semelhante a A, é dada por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Observe que os elementos da diagonal principal de D são os autovalores da matriz A.

Passo 4: *Montar a matriz diagonalizante P.*

A matriz P tal que $D = P^{-1}AP$ é dada por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que as colunas de P são os autovetores associados $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$. Observe, também, que a ordem em que autovalores e autovetores aparecem está correta: a primeira coluna de P é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 1$, enquanto as duas últimas colunas de P são os autovetores correspondentes ao autovalor $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$.

Aula 8

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES LINEARES

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender os conceitos de autovalor e autovetor de um operador linear;
2. compreender o conceito de operador linear diagonalizável;
3. reconhecer quando um operador linear é diagonalizável.

DIAGONALIZAÇÃO DE OPERADORES LINEARES

Pré-requisito: Aula 5.

Vamos começar lembrando alguns conceitos do curso de Álgebra Linear I. Uma *transformação linear* de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é uma função $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz

$$T(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1T(\mathbf{v}_1) + c_2T(\mathbf{v}_2)$$

para todo $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$ e todo $c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Chamamos *operador linear* uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Observe que, neste caso, tanto o domínio quanto o contra-domímio têm a mesma dimensão n. Lembre que, fixando a base canônica de $\mathbb{R}^n$, o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica representado pela matriz $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, chamada *matriz canônica*, através de multiplicação de matrizes da seguinte forma:

$$\mathbf{v} \mapsto A\mathbf{v},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v_2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix},$$

Lembre que a base canônica de $\mathbb{R}^n$ é composta pelos vetores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ onde cada $\mathbf{e}_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ tem como única componente não-nula a k-ésima componente com valor 1.

onde $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v_2} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$ é o vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2, \ldots,\ \mathbf{v}_n)$ descrito na base canônica. Denotando esta base por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, então as colunas da matriz A são as componentes dos vetores $T(\mathbf{e}_1), T(\mathbf{e}_2), \ldots, T(\mathbf{e}_n)$ na base canônica:

$$A = [\ T(\mathbf{e}_1) \quad T(\mathbf{e}_2) \quad \ldots \quad T(\mathbf{e}_n)\ ].$$

Vamos trocar a base canônica de $\mathbb{R}^n$ para uma outra base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$. Seja $P \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz que realiza a mudança da nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Lembre que a matriz P é obtida de modo que suas colunas são as componentes de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ com respeito à base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$:

$$P = [\ \mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{u}_n\ ].$$

Sabemos também que, com respeito à nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fica representado pela matriz $B \in M_n(\mathbb{R})$ através de multiplicação de matrizes da seguinte forma: para cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, escreva $\mathbf{v} = a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \ldots + a_n\mathbf{u}_n$, então $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$ é o vetor $\mathbf{v}$ descrito na base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ e

$$[\mathbf{v}]_\beta \mapsto B[\mathbf{v}]_\beta,$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}.$$

Lembre também que as colunas da matriz B são as componentes dos vetores $T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_n)$ com respeito à base β:

$$B = [\ T(\mathbf{u}_1) \quad T(\mathbf{u}_2) \quad \cdots \quad T(\mathbf{u}_n)\ ].$$

Por fim, também sabemos que a relação entre as matrizes A e B, que representam o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ na base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e na nova base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, é dada por:

$$B = P^{-1}AP,$$

ou seja, as matrizes A e B são semelhantes.

Exemplo 8.1.

Em $\mathbb{R}^2$, consideremos as seguintes bases:

$$\alpha = \{\mathbf{e}_1 = (1,0), \mathbf{e}_2 = (0,1)\} \text{ e } \beta = \{\mathbf{u}_1 = (1,-2), \mathbf{u}_2 = (2,-5)\},$$

e o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x,y) = (2x - 3y, 4x + y).$$

Determine as matrizes A e B, que representam o operador linear T, com respeito às bases α e β, respectivamente.

Solução:

Para obtermos a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que representa o operador linear T na base canônica, calculamos:

$$T(\mathbf{e}_1) = T(1,0) = (2,4) = 2\,\mathbf{e}_1 + 4\,\mathbf{e}_2$$
$$T(\mathbf{e}_2) = T(0,1) = (-3,1) = -3\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2;$$

portanto, a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

As colunas da matriz P são os vetores $\mathbf{u}_1 = (1,-2)$ e $\mathbf{u}_2 = (2,-5)$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Lembre que, se a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é inversível com determinante $\det A = ad - bc$, então sua matriz inversa é dada por $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Daí, obtemos facilmente que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

e, portanto, a matriz B, que representa o operador linear T na base β, é dada por

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 101 \\ -18 & -41 \end{pmatrix}.$$

Temos o seguinte resultado geral.

Teorema 8.1.

Duas matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ definem o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se A e B são matrizes semelhantes, isto é, se e somente se existe matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$.

Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz canônica do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, isto é, a matriz que representa este operador com respeito à base canônica, então, pelo Teorema 5.1 da Aula 5, toda matriz B, semelhante a A, tem o mesmo polinômio característico e os mesmos autovalores que A. E em vista do Teorema 8.1 acima, como todas as matrizes B, semelhantes a A, representam o mesmo operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, podemos considerar as seguintes definições de polinômio característico e autovalor do operador linear T:

Definição 8.1.

1. Um número real λ é chamado um *autovalor* do operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que
$$T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}. \tag{8.1}$$
Todo vetor não-nulo $\mathbf{v}$ que satisfaça (8.1) é chamado *autovetor associado* (ou *correspondente*) ao autovalor λ. Os autovalores também são chamados *valores próprios* ou *valores característicos*, e os autovetores são chamados *vetores próprios* ou *vetores característicos*. Observe que, se $A \in M_n(\mathbb{R})$ é a matriz que representa o operador T numa base qualquer de $\mathbb{R}^n$, isso equivale a dizer que λ é autovalor da matriz A, pois
$$T(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}.$$

2. Chamamos *autoespaço* do operador linear T, associado ao autovalor λ, ao subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ gerado por todos os autovetores de T associados a λ. Denotamos este autoespaço por
$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \mid T(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}.$$

3. O *polinômio característico* do operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o polinômio característico de qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ que representa o operador linear T com respeito a uma base qualquer de $\mathbb{R}^n$.

4. O operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é *diagonalizável* se existe uma base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ com respeito à qual o operador T é representado por uma matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{R})$.

Temos agora os seguintes resultados, consequências dos resultados análogos vistos para o caso de matrizes.

Teorema 8.2.

1. Sejam $\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \ldots,\ \mathbf{v}_m$ autovetores do operador linear $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ associados aos autovalores distintos $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$, respectivamente, então os autovetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ são linearmente independentes.

2. O escalar λ é um autovalor do operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se λ é uma raiz do polinômio característico de T.

3. O operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é diagonalizável se e somente se existe base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores de T. Nesse caso, se a matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

representa o operador T com respeito à base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$, então $T(\mathbf{u}_k) = \lambda_k\, \mathbf{u}_k$ para todo $k = 1, \ldots, n$, ou seja, os elementos da diagonal principal da matriz D são os autovalores do operador T.

4. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ a matriz que representa o operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ numa base qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então o operador linear T é diagonalizável se e somente se a matriz A é diagonalizável.

Esse último resultado reduz a investigação da diagonalização de operadores lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ao estudo da diagonalização de matrizes $A \in M_n(\mathbb{R})$, que foi discutido em detalhes nas aulas anteriores. Vejamos mais alguns exemplos.

Exemplo 8.2.

Determine todos os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$T(x, y) = (6x - y, 3x + 2y).$$

Determine se o operador T é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_2(\mathbb{R})$ que representa o operador T.

Solução:

Primeiramente, vamos calcular a matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ que representa o operador T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. Como

$$\begin{aligned} T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0) = (6,3) = 6\,\mathbf{e}_1 + 3\,\mathbf{e}_2 \\ T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1) = (-1,2) = -1\,\mathbf{e}_1 + 2\,\mathbf{e}_2\,, \end{aligned}$$

a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$ e $T(\mathbf{e}_2)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T será o polinômio característico da matriz A que é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_2 - A) \\ &= \begin{vmatrix} x-6 & 1 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} \\ &= x^2 - 8x + 15 \\ &= (x-3)(x-5). \end{aligned}$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$. A essa altura, já podemos concluir que o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é diagonalizável, pois, como ele tem dois autovalores distintos, então, pelo Teorema 8.2, qualquer par de autovetores correspondentes é linearmente independente e, portanto, forma base de autovetores para o $\mathbb{R}^2$.

Vamos determinar os autovetores. Para o autovalor $\lambda_1 = 3$, temos que os autovetores associados $\mathbf{v} = (x,y)$ satisfazem o sistema linear

$$(3I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x, 3x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_1 = (1,3)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 3$.

Analogamente, os autovetores $\mathbf{v} = (x,y)$, associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$, satisfazem o sistema linear

$$(5I_2 - A)\mathbf{v} = 0.$$

Escalonando a matriz desse sistema, obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, os autovetores de T associados ao autovalor $\lambda_2 = 5$ são da forma

$$\mathbf{v} = (x,x) \text{ com } x \in \mathbb{R}^*.$$

Em particular, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = 5$. Assim, $\beta = \{v_1, v_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T, e a representação diagonal de T é a matriz diagonal de ordem 2 cuja diagonal principal é formada pelos autovalores $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 5$:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 8.3.

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear que reflete pontos com respeito à reta pela origem $y = kx$, onde $k \in \mathbb{R}$. Veja a **Figura 8.1**.

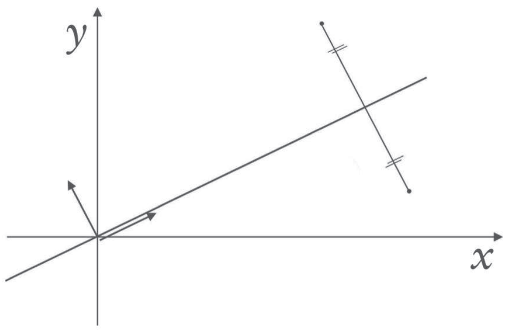


Figura 8.1: Reflexão com respeito à reta $y = kx$.

Mostre que:

a) $\mathbf{v}_1 = (1,k)$ e $\mathbf{v}_2 = (-k,1)$ são autovetores de T;

b) T é diagonalizável e encontre uma representação diagonal D de T.

Solução:

a) Como não conhecemos as equações que definem a transformação T, procedemos geometricamente como segue.

Observe que o vetor $\mathbf{v}_1 = (1,k)$ pertence à reta $y = kx$, logo ele é mantido fixo pela ação do operador T, isto é, $T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1$. Assim, $\mathbf{v}_1$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 1$.

Por outro lado, observamos que o vetor $\mathbf{v}_2 = (-k, 1)$ é ortogonal ao vetor $\mathbf{v}_1$, pois

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 1 \cdot (-k) + k \cdot 1 = 0,$$

e, consequentemente, $\mathbf{v}_2$ é perpendicular à reta $y = kx$. Assim, o operador T transforma o vetor $\mathbf{v}_2$ em seu negativo $-\mathbf{v}_2$, isto é, $T(\mathbf{v}_2) = -\mathbf{v}_2$. Logo, $\mathbf{v}_2$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

b) Como os vetores $\mathbf{v}_1 = (1, k)$ e $\mathbf{v}_2 = (-k, 1)$ são linearmente independentes, temos que $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T. Portanto, o operador T é diagonalizável com representação diagonal dada por

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 8.4.

Determine todos os autovalores e autovetores do operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (2x + y, y - z, 2y + 4z).$$

Determine se o operador T é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, a matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T e a base de autovetores correspondente.

Solução:

O procedimento é semelhante ao do Exemplo 8.2. Primeiramente, vamos calcular a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$. Como

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{e}_1) &= T(1,0,0) = (2,0,0) = 2\,\mathbf{e}_1 + 0\,\mathbf{e}_2 + 0\,\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_2) &= T(0,1,0) = (1,1,2) = 1\,\mathbf{e}_1 + 1\,\mathbf{e}_2 + 2\,\mathbf{e}_3 \\
T(\mathbf{e}_3) &= T(0,0,1) = (0,-1,4) = 0\,\mathbf{e}_1 + (-1)\,\mathbf{e}_2 + 4\,\mathbf{e}_3,
\end{aligned}$$

a matriz A, tendo como colunas $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ e $T(\mathbf{e}_3)$, é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T será o polinômio característico da matriz A que é dado por

$$\begin{aligned}
p(x) &= \det(xI_3 - A)\\
&= \begin{vmatrix} x-2 & -1 & 0\\ 0 & x-1 & 1\\ 0 & -2 & x-4 \end{vmatrix}\\
&= (x-2)\begin{vmatrix} x-1 & 1\\ -2 & x-4 \end{vmatrix}\\
&= (x-2)[(x-1)(x-4)+2]\\
&= (x-2)(x^2-5x+6)\\
&= (x-2)(x-2)(x-3)\\
&= (x-2)^2(x-3).
\end{aligned}$$

Assim, os autovalores de T são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$. Como temos apenas dois autovalores distintos, ainda não podemos decidir se T é diagonalizável. Vamos, primeiramente, determinar uma base do autoespaço

$$E(2) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\mathbf{v}) = 2\mathbf{v}\}$$

associado ao autovalor $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Sabemos que um vetor $\mathbf{v} = (x,y,z)$ pertence ao autoespaço $E(2)$ se e somente se ele é solução do sistema linear

$$(2I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, de

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{v} = (x,0,0)$, $x \in \mathbb{R}$. Como a solução geral depende apenas de uma variável independente, então o autoespaço $E(2)$ é unidimensional. Temos que $\mathbf{v}_1 = (1,0,0)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$ e, portanto, forma uma base de $E(2)$.

Vamos agora procurar uma base do autoespaço

$$E(3) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid T(\mathbf{v}) = 3\mathbf{v}\},$$

associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$. Sabemos que um vetor $\mathbf{v} = (x,y,z)$ pertence ao autoespaço $E(3)$ se e somente se ele é solução do sistema linear

$$(3I_3 - A)\mathbf{v} = 0,$$

isto é, do sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escalonando a matriz associada desse sistema, obtemos o sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são $\mathbf{v} = (-z, -z, 2z)$, $z \in \mathbb{R}$. Como a solução geral depende, novamente, apenas de uma variável independente, então o autoespaço $E(3)$ também é unidimensional. Nesse caso, $\mathbf{v}_2 = (-1, -1, 2)$ é um autovetor de T associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ e, portanto, forma uma base de $E(3)$.

Como T possui apenas dois autovetores linearmente independentes, então não existe base de autovetores de T para o $\mathbb{R}^3$ e, portanto, pelo Teorema 8.2, o operador linear T não é diagonalizável.

Autoavaliação

Terminamos o primeiro módulo do curso de Álgebra Linear II. Não deixe de fazer uma boa revisão dos conceitos vistos neste primeiro módulo antes de iniciar o segundo. Faça os exercícios desta aula e reveja os das aulas anteriores. Se você ficar com alguma dúvida, procure o tutor no seu polo.

Exercício 8.1.

1. Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{v}) = \mathbf{Av}$. Mostre que $\mathbf{v}_1 = (1,1)$ é autovetor de T e que o operador linear T não é diagonalizável.

2. Verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x,y,z) = (z,y,x)$$

é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_3(\mathbb{R})$ que representa o operador T e uma base de autovetores correspondente.

3. Verifique se o operador linear $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por

$$T(x,y,z,t) = (3x-4z, 3y+5z, -z, -t)$$

é diagonalizável e, caso seja, determine uma representação diagonal, ou seja, uma matriz diagonal $D \in M_4(\mathbb{R})$ que representa o operador T e uma base de autovetores correspondente.

4. Mostre que 0 é autovalor do operador $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e somente se T é não-inversível.

Aula 9

MATRIZES ORTOGONAIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. fazer uma revisão de conceitos importantes de ortogonalidade;
2. compreender o conceito de matriz ortogonal;
3. praticar cálculos com matrizes ortogonais.

MATRIZES ORTOGONAIS

Pré-requisitos:
Produto interno
entre dois vetores.

Neste módulo, estaremos considerando o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ munido do produto interno usual, também chamado de produto escalar. Ou seja, dados os vetores $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ e $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$, o produto escalar de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dado por

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n,$$

que também denotamos por $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Na linguagem de matrizes, consideramos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ como matrizes colunas $n \times 1$, que denotamos por

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

Denotando por $\mathbf{u}^t$ a matriz transposta de $\mathbf{u}$, o produto interno de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pode ser expresso na forma:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^t\mathbf{v} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \mathbf{u}_n\mathbf{v}_n.$$

Vamos relembrar algumas definições.

Definição 9.1.

1. A *norma* de um vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \in \mathbb{R}^n$ é dada por
$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2 + \ldots + \mathbf{v}_n^2},$$
e o vetor $\mathbf{v}$ é *unitário* se $\|\mathbf{v}\| = 1$.

2. Dado um vetor não-nulo $\mathbf{v}$, o *vetor unitário na direção e sentido de* $\mathbf{v}$ é o vetor dado por
$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|},$$
e dizemos que o vetor $\mathbf{v}$ foi *normalizado*.

3. O *ângulo* $\theta \in [0, \pi]$ entre os vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é dado por
$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \; \|\mathbf{v}\|}.$$

4. Dois vetores não-nulos $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são *ortogonais* se o ângulo entre eles é de 90^o. Pela fórmula anterior, isso equivale a dizer que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Veremos que muitas matrizes possuem propriedades geométricas especiais que são caracterizadas pela forma como sua ação em vetores se comporta com respeito ao produto interno. Por exemplo, quando a ação da matriz preserva a norma dos vetores ou quando a ação preserva o ângulo entre dois vetores.

Na discussão que se segue, um papel central é desempenhado pelos conjuntos de vetores ortogonais de $\mathbb{R}^n$.

Definição 9.2.

1. Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de vetores não-nulos de $\mathbb{R}^n$ é dito *conjunto ortogonal* se cada par de vetores distintos é ortogonal, isto é, se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. Chamamos de *base ortogonal* a toda base que também é conjunto ortogonal.

2. Um conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de vetores não-nulos de $\mathbb{R}^n$ é dito *conjunto ortonormal* se é conjunto ortogonal e se todos os seus vetores são unitários, isto é, se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e se $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ para todo i. Chamamos de *base ortonormal* a toda base que também é conjunto ortonormal.

O conjunto mais simples de base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ é a *base canônica* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Os seguintes resultados foram vistos no curso de Álgebra Linear I:

Teorema 9.1.

1. Todo conjunto ortogonal de vetores é linearmente independente.

2. Todo conjunto ortogonal de n vetores de $\mathbb{R}^n$ forma uma base (ortogonal) de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 9.1.

Mostre que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, onde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \\ 1/\sqrt{11} \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \ \text{e} \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{66} \\ -4/\sqrt{66} \\ 7/\sqrt{66} \end{pmatrix}.$$

Solução:

Calculando os produtos internos:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{-3}{\sqrt{66}} + \frac{2}{\sqrt{66}} + \frac{1}{\sqrt{66}} = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{-3}{\sqrt{726}} - \frac{4}{\sqrt{726}} + \frac{7}{\sqrt{726}} = 0;$$

$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{396}} - \frac{8}{\sqrt{396}} + \frac{7}{\sqrt{396}} = 0,$$

temos que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto ortogonal formado por 3 vetores em $\mathbb{R}^3$. Pelo Teorema 9.1, antes apresentado, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Além disso,

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \frac{9}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = 1;$$
$$\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} + \frac{1}{6} = 1;$$
$$\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle = \frac{1}{66} + \frac{16}{66} + \frac{49}{66} = 1,$$

o que mostra que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ são vetores unitários. Logo, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é conjunto ortonormal e, portanto, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Vale a pena destacar que, quando os vetores de um conjunto ortogonal são normalizados, o conjunto permanece ortogonal, sendo, agora, também, conjunto ortonormal. Portanto, quando uma base ortogonal é normalizada, obtemos uma base ortonormal que preserva as mesmas direções dos vetores da base ortogonal original.

Exemplo 9.2.

Obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ na qual um dos vetores tenha a direção do vetor $\mathbf{v} = (3,4)$.

Solução:

Precisamos encontrar um vetor $\mathbf{w} = (x,y)$ que seja ortogonal a $\mathbf{v} = (3,4)$. Assim, temos que

$$\langle (3,4), (x,y) \rangle = 0$$
$$3x + 4y = 0,$$

isto é,

$$3x = -4y,$$

ou,

$$y = -\frac{3}{4}x.$$

Assim, todo vetor da forma $\mathbf{w} = (t, -3t/4)$, com $t \in \mathbb{R}^*$, é ortogonal a $\mathbf{v} = (3,4)$. Em particular, os vetores $\mathbf{w} = (-4,3)$ $(t = -4)$ e $\mathbf{w} = (4,-3)$ $(t = 4)$, como mostra a **Figura 9.1**.

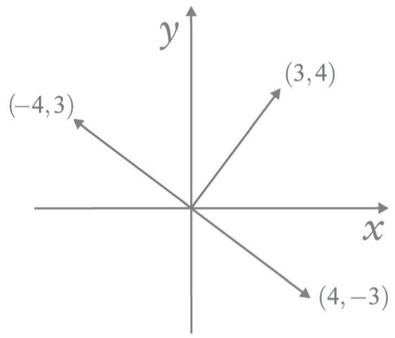


Figura 9.1: Vetores ortogonais.

Como $\{(3,4),(-4,3)\}$ é um conjunto ortogonal formado por 2 vetores de $\mathbb{R}^2$, então, pelo Teorema 9.1, é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Normalizando esta base, obtemos

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||} = \frac{1}{5}(3,4) = (3/5,4/5)$$
$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||} = \frac{1}{5}(-4,3) = (-4/5,3/5).$$

Assim, o conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ em que o vetor $\mathbf{v}_1 = (3/5,4/5)$ preserva a direção de $\mathbf{v} = (3,4)$.

De um modo geral, dado um vetor não-nulo $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$, o vetor $\mathbf{w} = (-b,a)$ é um vetor ortogonal a $\mathbf{v}$, representado por uma rotação em $\mathbf{v}$ de 90^o no sentido anti-horário, como é ilustrado na **Figura 9.1** pelos vetores $\mathbf{v} = (3,4)$ e $\mathbf{w} = (-4,3)$.

O próximo exemplo descreve a construção de uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 9.3.

Obtenha uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ na qual um dos vetores tenha a direção do vetor $\mathbf{v} = (-1,2,1)$.

Solução:

Um vetor $\mathbf{u} = (x,y,z)$ é ortogonal a $\mathbf{v} = (-1,2,1)$ se e somente se

$$\langle(-1,2,1),(x,y,z)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$-x+2y+z=0,$$

o que nos dá

$$z=x-2y.$$

Assim, todo vetor da forma

$$\mathbf{u}=(x,y,x-2y)=(1,0,1)\,x+(0,1,-2)\,y,$$

$x,\ y\in\mathbb{R}$ $(x\neq 0\ \text{ ou }\ y\neq 0)$, é ortogonal a $\mathbf{v}$. Em particular, escolhendo $x=1$, $y=0$, obtemos o vetor $\mathbf{u}=(1,0,1)$ ortogonal a $\mathbf{v}=(-1,2,1)$.

Queremos, agora, um vetor $\mathbf{w}=(a,b,c)$ que seja ortogonal a $\mathbf{v}=(-1,2,1)$ e a $\mathbf{u}=(1,0,1)$. Assim, queremos que sejam satisfeitas as condições

$$\begin{cases} \langle(-1,2,1),(a,b,c)\rangle=0 \\ \langle(1,0,1),(a,b,c)\rangle=0\ , \end{cases}$$

o que nos dá o sistema linear

$$\begin{cases} -a+2b+c=0 \\ a+c=0\ . \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$c=-a \text{ e } \ b=a,$$

o que nos dá vetores da forma

$$\mathbf{w}=(a,a,-a)=(1,1,-1)\,a,\quad a\in\mathbb{R}^*.$$

Escolhendo $a=1$, obtemos o vetor $\mathbf{w}=(1,1,-1)$ ortogonal a $\mathbf{v}=(-1,2,1)$ e a $\mathbf{u}=(1,0,1)$. Como $\{\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{w}\}$ é um conjunto de 3 vetores ortogonais de $\mathbb{R}^3$, então esse conjunto forma uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Normalizando esses vetores, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1&=\frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}=(-1/\sqrt{6},\ 2/\sqrt{6},\ 1/\sqrt{6});\\
\mathbf{v}_2&=\frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||}=(1/\sqrt{2},\ 0,\ 1/\sqrt{2});\\
\mathbf{v}_3&=\frac{\mathbf{w}}{||\mathbf{w}||}=(1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ -1/\sqrt{3}),
\end{aligned}$$

e, assim, $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Depois de revermos esses fatos importantes sobre conjuntos ortogonais, vamos introduzir um tipo especial de matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormal de vetores. Este tipo de matriz é muito importante em várias aplicações e em algoritmos computacionais.

Definição 9.3.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é chamada *ortogonal* se $A^t \cdot A = I_n$, onde A^t é a matriz transposta de A e I_n é a matriz identidade de ordem n.

Vamos ver, inicialmente, uma propriedade que facilitará nossos cálculos posteriormente.

Teorema 9.2.

Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é ortogonal se e somente se suas colunas formam um conjunto de n vetores ortonormais, e, portanto, formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

Sejam $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ as colunas da matriz A, isto é,

$$A = [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n\ ].$$

Então,

$$A^tA = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^t \\ \mathbf{v}_2^t \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^t \end{bmatrix} \cdot [\ \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n\ ] \ =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_1^t \cdot \mathbf{v}_n \\ \mathbf{v}_2^t \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2^t \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_2^t \cdot \mathbf{v}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_n^t \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_n^t \cdot \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n^t \cdot \mathbf{v}_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_n \rangle \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1 \rangle & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_n \rangle \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

As colunas da matriz A formam um conjunto de n vetores ortogonais se e somente se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$ para todo $i \neq j$. E essas colunas são vetores unitários se e somente se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 1$ para todo i. Assim, as colunas da matriz A formam uma base de vetores ortonormais se e somente se a matriz em (1) é a matriz identidade, isto é, se e somente se $A^t A = I_n$, ou seja, se e somente se a matriz A é ortogonal.

Exemplo 9.4.

Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

Solução:

Vimos, no Exemplo 9.2, que os vetores formados pelas colunas da matriz A,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{pmatrix},$$

são ortonormais. Logo, pelo Teorema 9.2, a matriz A é matriz ortogonal.

Exemplo 9.5.

Verifique se a matriz $A = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

Solução:

Vimos, no Exemplo 9.3, que os vetores formados pelas colunas da matriz A,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

são ortonormais. Logo, pelo Teorema 9.2, a matriz A é matriz ortogonal.

Autoavaliação

Estude bem os conceitos apresentados nesta aula, pois serão exaustivamente explorados nas próximas aulas. Não deixe de trabalhar os exercícios que seguem. Se você tiver qualquer dúvida, consulte seu tutor.

Exercício 9.1.

1. Seja $\mathbf{v} = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ um vetor unitário, isto é, que satisfaz $a^2+b^2 = 1$. Obtenha todas as matrizes ortogonais A, de ordem 2, cuja primeira coluna é o vetor $\mathbf{v} = (a,b)$.

2. Determine o valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que os vetores

$$\mathbf{u} = (1,2,k,3) \text{ e } \mathbf{u} = (3,k,7,-5)$$

sejam ortogonais.

3. Dado $\mathbf{u} = (0,1,-2,5) \in \mathbb{R}^4$, determine uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenha o vetor $\mathbf{u}$.

4. Seja S o subconjunto de $\mathbb{R}^3$ formado pelos vetores

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,1),\ \mathbf{u}_2 = (1,2,-3) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (5,-4,-1).$$

Mostre que S é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ e transforme essa base numa base ortonormal.

5. Determine uma matriz ortogonal cuja primeira coluna é o vetor $\mathbf{u}_1 = (1/3,2/3,2/3)$.

Aula 10

PROPRIEDADES DAS MATRIZES ORTOGONAIS

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender algumas propriedades geométricas das matrizes ortogonais;
2. conhecer exemplos importantes de matrizes ortogonais;
3. praticar a leitura de demonstrações matemáticas de propriedades importantes em Álgebra Linear.

PROPRIEDADES DAS MATRIZES ORTOGONAIS

Pré-requisitos: Autovalores e autovetores de matrizes, Aula 9.

Nesta aula, veremos algumas propriedades geométricas das matrizes ortogonais. Lembre que as matrizes ortogonais foram abordadas na aula passada.

Teorema 10.1.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal. Então

1. $\det(A) = \pm 1$
2. A é matriz inversível e $A^{-1} = A^t$.
3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor da matriz A, então $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.
4. Se $B \in M_n(\mathbb{R})$ é matriz ortogonal, então o produto AB também é matriz ortogonal.

Demonstração

1. Lembrando que A ortogonal significa $A^t \cdot A = I_n$ e que $\det(A^t) = \det(A)$, temos

$$\begin{aligned} (\det(A))^2 &= \det(A) \cdot \det(A) \\ &= \det(A^t) \cdot \det(A) \\ &= \det(A^t A) \\ &= \det(I_n) = 1 \ , \end{aligned}$$

donde se conclui que $\det(A) = \pm 1$.

2. Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A é inversível. E, de $A^t \cdot A = I_n$, segue que $A^{-1} = A^t$.

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor da matriz A, então existe um vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle &= \langle \lambda \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v} \rangle \\ &= (A\mathbf{v})^t \cdot (A\mathbf{v}) = (\mathbf{v}^t A^t) \cdot (A\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^t \ (A^t A)\mathbf{v} = \mathbf{v}^t \ (I_n \mathbf{v}) \\ &= \mathbf{v}^t \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ , \end{aligned}$$

e, como $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, segue que $\lambda^2 = 1$. Logo, $\lambda = \pm 1$.

4. Como a matriz B também é ortogonal, então $B^t \cdot B = I_n$. Para concluir que AB é ortogonal, devemos mostrar que $(AB)^t \cdot (AB) = I_n$. Temos

$$\begin{aligned} (AB)^t \cdot (AB) &= (B^t A^t)(AB) \\ &= B^t (A^t A) B \\ &= B^t I_n B \\ &= B^t B \\ &= I_n\,, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

CQD

Gostaríamos de ressaltar que a propriedade 3, mencionada antes, diz que caso uma matriz ortogonal A possua autovalor λ então $\lambda = \pm 1$. Mas não é necessário que uma matriz ortogonal A tenha algum autovalor, como veremos num próximo exemplo.

Exemplo 10.1.

Vimos, no Exercício 1 da Aula 9, que se $a^2 + b^2 = 1$, então as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$$

são matrizes ortogonais. Observe que

$$\begin{aligned} &\det(A) = a^2 + b^2 = 1 \text{ e} \\ &\det(B) = -a^2 - b^2 = -(a^2 + b^2) = -1. \end{aligned}$$

Exemplo 10.2.

Sejam $\theta, \varphi \in [0, 2\pi)$, então as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}$$

são matrizes ortogonais com determinantes

$$\begin{aligned} &\det(A) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1 \text{ e} \\ &\det(B) = -\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi = -(\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi) = -1. \end{aligned}$$

Estas matrizes serão estudadas mais detalhadamente nas próximas aulas.

O próximo teorema fornece algumas propriedades geométricas das matrizes ortogonais.

Teorema 10.2.

Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$ uma matriz ortogonal e sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Então:

1. A matriz A preserva o produto interno, isto é, $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. Em particular, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores ortogonais, então $A\mathbf{u}$ e $A\mathbf{v}$ também são ortogonais.

2. A matriz A preserva a norma, isto é, $||A\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$.

3. A matriz A transforma bases ortonormais em bases ortonormais, isto é, se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, então $\{A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n\}$ também é base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração

1. Dados $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle &= (A\mathbf{u})^t(A\mathbf{v}) \\ &= (\mathbf{u}^t A^t)(A\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^t(A^t A)\mathbf{v} \\ &= \mathbf{u}^t(I_n\mathbf{v}) \\ &= \mathbf{u}^t\mathbf{v} \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \ . \end{aligned}$$

   Em particular, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais, isto é, se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$, então

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0,$$

   ou seja, $A\mathbf{u}$ e $A\mathbf{v}$ também são ortogonais.

2. Utilizando a propriedade 1, no caso $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, temos

$$\begin{aligned} ||A\mathbf{v}||^2 &= \langle A\mathbf{v}, A\mathbf{v}\rangle \\ &= \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle \\ &= ||\mathbf{v}||^2, \end{aligned}$$

   logo, temos que $||A\mathbf{v}|| = ||\mathbf{v}||$.

3. Seja $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$. Então $\left\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle = 0$ para todo $i \neq j$ e $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ ara todo i. Pelas propriedades anteriores, temos

$$\begin{array}{l} \left\langle A\mathbf{u}_i, A\mathbf{u}_j \right\rangle = \left\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \right\rangle = 0 \ \text{ para todo } i \neq j, \ \text{ e} \\ \|A\mathbf{u}_i\| = \|\mathbf{u}_i\| = 1 \ \text{ para todo } \ i. \end{array}$$

Logo, $\{A\mathbf{u}_1, A\mathbf{u}_2, \ldots, A\mathbf{u}_n\}$ é um conjunto ortonormal de n vetores de $\mathbb{R}^n$ e, portanto, forma uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

CQD

A propriedade 1 do Teorema 10.2 afirma que o ângulo entre dois vetores é preservado, e a propriedade 2 afirma que o comprimento e a distância entre vetores é preservada. Essas propriedades são cruciais para a implementação de algoritmos computacionais.

Exemplo 10.3.

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ e \ \ \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique se:

a. a matriz A é ortogonal;

b. $\|A\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$;

c. $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Solução:

a. Note que as colunas da matriz A são ortogonais portanto, pelo Teorema 9.2 da Aula 9, segue que A é matriz ortogonal. Também podemos verificar diretamente pela definição:

$$\begin{aligned} A^t \cdot A &= \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3. \end{aligned}$$

b. Temos que

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}.$$

Para calcular $\|A\mathbf{u}\|$, vamos primeiro calcular $A\mathbf{u}$:

$$A\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{u}\| &= \sqrt{(1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2+(-1)^2} = \sqrt{(1/2)+(1/2)+1} = \\ &= \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\|A\mathbf{u}\| = \sqrt{2} = \|\mathbf{u}\|$.

c. Vamos primeiro calcular $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$:

$$\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle = 1\cdot 1+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 = 1.$$

Calculemos, agora, $A\mathbf{v}$:

$$A\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, calculando $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle$, obtemos

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 0+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}+(-1)\cdot 0 = 1.$$

Assim, $\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v} \rangle = 1 = \langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$.

Exemplo 10.4.

Determine os autovalores da matriz A do Exemplo 10.3.

Solução:

Lembre que os autovalores da matriz A são as raízes do seu polinômio característico, e esse polinômio é dado por:

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - A) = \begin{bmatrix} x-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & x-1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix} \\ &= (x-1)\begin{bmatrix} x-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & x-1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= (x-1)\left[\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} \right] \\ &= (x-1)(x^2-\sqrt{2}x+1). \end{aligned}$$

Agora, a única raiz real de $p(x) = (x-1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$ é $\lambda = 1$, pois o polinômio $x^2-\sqrt{2}x+1$ não possui raízes reais. Assim, a matriz A possui um único autovalor real, $\lambda = 1$.

Exemplo 10.5.

Sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ duas bases ortonormais de $\mathbb{R}^3$. Mostre que a matriz A que realiza a mudança de base de β para α é uma matriz ortogonal.

Solução:

A matriz que realiza a mudança de base de β para α é a matriz $A = (a_{ij})$ definida por

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 &= a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3\,. \end{aligned}$$

Sendo $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle = 1 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Usando estas igualdades e o fato de $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ ser base ortonormal, temos

$$\begin{aligned}1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3, a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 \rangle = \\ = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2,\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}1 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 \rangle = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 \\ 1 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 \rangle = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2.\end{aligned}$$

Temos, também,

$$\begin{aligned}0 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3, a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 \rangle = \\ = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32},\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}0 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ 0 = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33}.\end{aligned}$$

Portanto, estas igualdades mostram que as colunas da matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

formam uma base de vetores ortonormais. Logo, pelo Teorema 9.2, da Aula 9, A é matriz ortogonal.

Autoavaliação

Nesta aula apresentamos alguns resultados que caracterizam as matrizes ortogonais. Você deve resolver os exercícios que se seguem com a ajuda do seu tutor, se necessário. Nas próximas aulas, vamos usar exaustivamente todos os resultados apresentados nesta aula; portanto, é importante que você compreenda o significado geométrico deles.

Exercício 10.1.

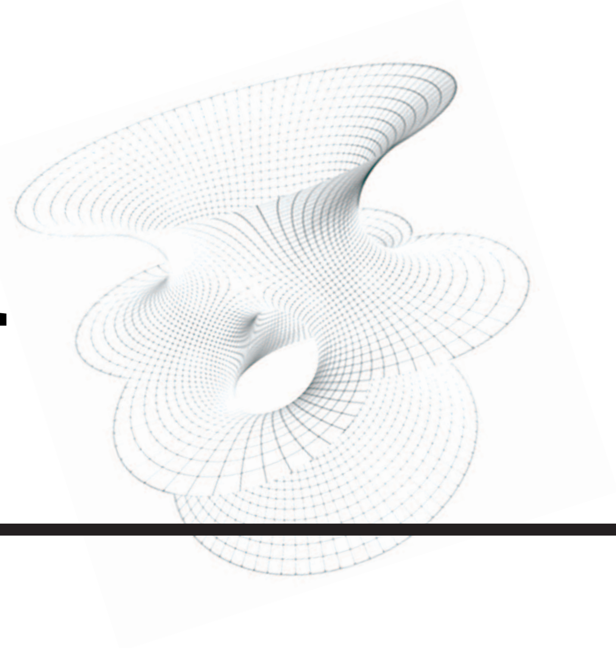
1. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   a. Verifique que A e B são matrizes ortogonais.

   b. Verifique que o produto AB é ortogonal e calcule seus autovalores.

Aula 11



ROTAÇÕES NO PLANO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o efeito das rotações no plano em torno da origem;
2. verificar que estas rotações são exemplos de matrizes ortogonais.

ROTAÇÕES NO PLANO

Pré-requisito: Aula 10.

Neste capítulo vamos construir um tipo de matriz ortogonal muito importante de ordem 2. São as matrizes que representam as rotações no plano em torno da origem. Primeiro, vejamos uma definição que generaliza um pouco o conceito de matriz ortogonal.

Definição 11.1.

Um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é chamado *operador ortogonal* se, em alguma base ortogonal, ele é representado por uma matriz ortogonal.

Vamos considerar, no plano cartesiano, uma rotação de θ radianos em torno da origem $O = (0,0)$. Denotaremos esta rotação por A_θ. O operador A_θ transforma o ponto (x,y) no novo ponto $(x',y') = A_\theta(x,y)$. A **Figura 11.1** ilustra a ação de A_θ, onde $\mathbf{v} = (x,y)$ é o vetor posição do ponto (x,y).

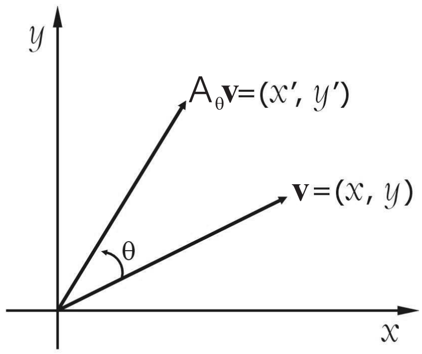


Figura 11.1: Rotação de θ radianos.

Observe que o vetor $\mathbf{v} = (x,y)$ sofre uma rotação de θ radianos em torno da origem. Convencionaremos que a rotação será no sentido anti-horário quando θ for positivo e no sentido horário quando θ for negativo.

Exemplo 11.1.

Vamos verificar, geometricamente, a ação de uma rotação sobre um quadrado unitário de vértice na origem.

Solução:

Vamos considerar o quadrado unitário de vértices $\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1)$. A ação da rotação A_θ sobre os vértices desse quadrado são os pontos $A_\theta(\mathbf{v}_0) = (0,0)$, $A_\theta(\mathbf{v}_1)$, $A_\theta(\mathbf{v}_2)$ e$A_\theta(\mathbf{v}_3)$, que formam os vértices de um novo quadrado de lado 1, como indica a **Figura 11.2**.

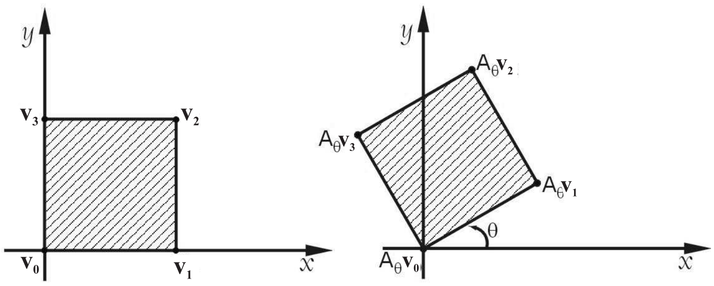


Figura 11.2: Rotação de um quadrado unitário.

Como as rotações são operadores lineares, A_θ é representado por um matriz de ordem 2, que continuaremos denotando por A_θ. Quando aplicamos a matriz A_θ ao vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, sua imagem $A_\theta \mathbf{v}$ terá o mesmo comprimento do vetor $\mathbf{v}$, isto é,

$$||A_\theta v|| \;=\; ||v||.$$

Portanto, é de se esperar que A_θ seja uma matriz ortogonal. Vamos verificar isto na próxima propriedade.

Teorema 11.1.

A rotação de θ radianos em torno da origem é representada pela matriz

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Demonstração

Queremos expressar as coordenadas do ponto $(x', y') = A_\theta(x,y)$ em função do ângulo θ e das coordenadas do ponto $\mathbf{v} = (x,y)$. Inicialmente, representamos o ponto (x,y) em coordenadas polares:

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{array}\right. \tag{11.1}$$

onde

$$\left\{\begin{array}{l} r = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{tg}\,\varphi \; = \dfrac{y}{x} \quad (x \neq 0)\,, \end{array}\right.$$

onde φ é o ângulo que o vetor $\mathbf{v} = (x,y)$ forma com o semieixo-x positivo, conforme a **Figura 11.3**.

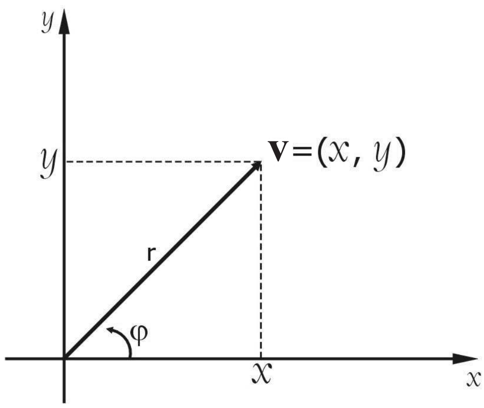


Figura 11.3: Coordenadas polares.

Agora, $(x',y') = A_\theta(\mathbf{v})$ é a imagem do vetor $\mathbf{v} = (x,y)$ após a rotação de θ radianos no sentido anti-horário (que consideraremos como o sentido positivo). Em forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Mas, observando a **Figura 11.4**,

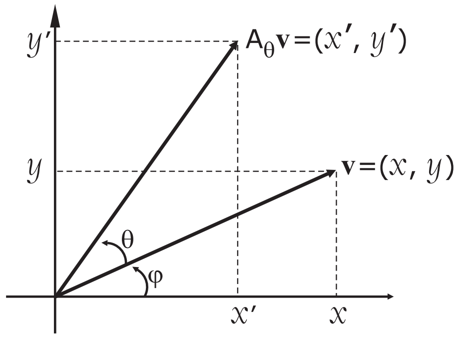


Figura 11.4: Componentes de $(x', y') = A_\theta(\mathbf{v})$.

vemos que $\|A_\theta \mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\| = r$, assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = r\cos(\varphi + \theta) \\ y = r\,\mathrm{sen}\,(\varphi + \theta)\,. \end{array} \right. \tag{11.2}$$

Lembrando das fórmulas trigonométricas de adição de arcos,

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \mathrm{sen}\; a\; \mathrm{sen}\; b \\ \mathrm{sen}\,(a \pm b) = \mathrm{sen}\; a\, \cos b \pm \mathrm{sen}\; b \cos a\ , \end{array} \right.$$

e aplicando-as em (11.2), obtemos que

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = r\cos(\varphi + \theta) = r\cos\varphi\, \cos\theta - r\,\mathrm{sen}\,\varphi\; \mathrm{sen}\;\theta \\ y' = r\,\mathrm{sen}\,(\varphi + \theta) = r\,\mathrm{sen}\,\varphi\; \cos\theta + r\cos\varphi\; \mathrm{sen}\,\theta\ , \end{array} \right.$$

o que nos dá, substituindo (11.1) nas equações acima,

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = x\cos\theta - y\;\mathrm{sen}\;\theta \\ y' = y\cos\theta + x\cos\theta\ . \end{array} \right. \tag{11.3}$$

Usando a notação matricial, as equações (11.3) podem ser representadas por

$$\left(\begin{array}{c} x' \\ y' \end{array} \right) = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\;\theta \\ \mathrm{sen}\;\theta & \cos\theta \end{array} \right] \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right).$$

Assim, a matriz A_θ, da rotação de θ radianos em torno da origem, é dada por

$$A_\theta = \left[\begin{array}{cc} \cos\theta & -\,\mathrm{sen}\;\theta \\ \mathrm{sen}\;\theta & \cos\theta \end{array} \right].$$

Observe que as linhas de A_θ : $(\cos\theta, -\,\mathrm{sen}\,\theta)$ e $(\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta)$, formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, assim como as suas colunas. Consequentemente, A_θ é uma matriz ortogonal.

CQD

Exemplo 11.2.

Determine as coordenadas dos vértices do quadrado unitário da **Figura 11.2**, após este sofrer uma rotação de $\pi/4$ radianos (45 graus) em torno da origem e no sentido anti-horário.

Solução: No caso $\theta = \pi/4$, a matriz rotação é dada por:

$$A = A_{\pi/4} = \begin{bmatrix} \cos\pi/4 & -\operatorname{sen}\pi/4 \\ \operatorname{sen}\pi/4 & \cos\pi/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$

Os vértices do quadrado são: $\mathbf{v}_0 = (0,0), \mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1)$. Denotamos as imagens desses vértices por: $\mathbf{u}_0 = A\mathbf{v}_0$, $\mathbf{u}_1 = A\mathbf{v}_1$, $\mathbf{u}_2 = A\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{u}_3 = A\mathbf{v}_3$. Assim, temos que

$$\mathbf{u}_0 = A\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}_1 = A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}_2 = A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{u}_3 = A\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix};$$

Portanto, as coordenadas dos vértices do quadrado unitário, após sofrer a rotação de $\pi/4$ radianos (45 graus), são:

$$\mathbf{u}_0 = (0,0);\ \mathbf{u}_1 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2);\ \mathbf{u}_2 = (0, \sqrt{2}) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2).$$

A **Figura 11.5** ilustra os dois quadrados, antes e após a rotação.

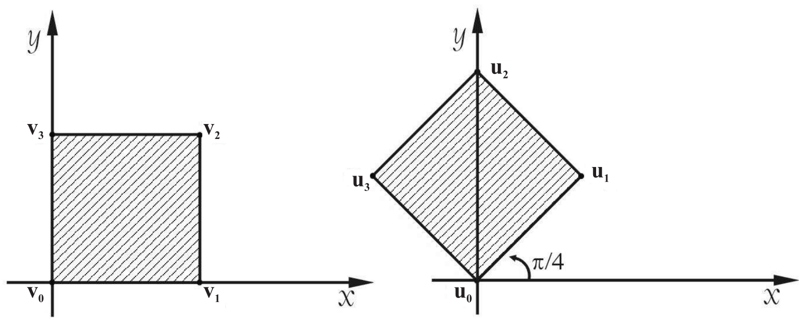


Figura 11.5: Rotação de $\pi/4$ radianos do quadrado unitário.

Com relação a este último exemplo, vale a pena fazer a seguinte observação sobre notação. Denotando os vértices $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ do quadrilátero inicial através da matriz 2×4 dada por

$$D = [\ \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vemos que a imagem dos vértices desse quadrilátero pela ação da matriz $A = A_{\pi/4}$ é simplesmente um produto de matrizes:

$$A \cdot D = C.$$

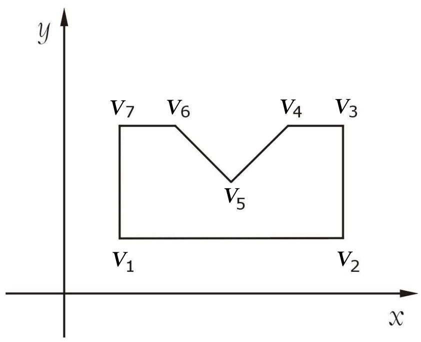
Observe que C é uma matriz 2×4 e suas colunas são exatamente os vértices do quadrilátero imagem. De fato,

$$\begin{aligned} A \cdot D &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esta notação tem a vantagem de acelerar os cálculos a serem efetuados e será utilizada novamente no próximo capítulo.

Exercício 11.1.

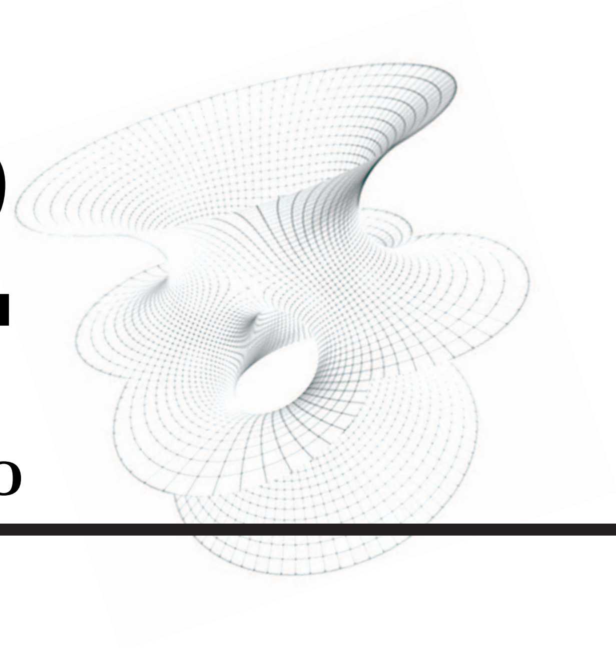
1. Determine a imagem dos vértices da figura abaixo após uma rotação de $\pi/4$ radianos. Os vértices são: $\mathbf{v}_1 = (1,1); \mathbf{v}_2 = (5,1)$; $\mathbf{v}_3 = (5,3); \mathbf{v}_4 = (4,3); \mathbf{v}_5 = (3,2); \mathbf{v}_6 = (2,3)$e $\mathbf{v}_7 = (1,3)$.



2. Verifique que duas matrizes de rotação no plano comutam. Qual o ângulo resultante desta composição?

Aula 12

REFLEXÕES NO PLANO



Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o efeito das reflexões no plano com respeito a uma reta;
2. verificar que estas reflexões são exemplos de matrizes ortogonais.

REFLEXÕES NO PLANO

Pré-requisitos:
Aulas 10 e 11.

Nesta aula, estudaremos mais um importante exemplo de matriz ortogonal de ordem 2. Estudaremos as matrizes ortogonais que representam as reflexões no plano com respeito a uma reta L passando pela origem. Se $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor qualquer, denotaremos por $F_L(\mathbf{v})$ a reflexão do vetor $\mathbf{v}$ com respeito à reta L, como ilustra a **Figura 12.1** abaixo.

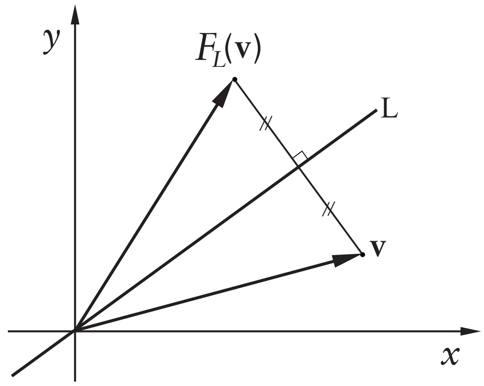


Figura 12.1: Reflexão com respeito à reta L.

Observe que a reflexão F_L preserva o comprimento do vetor $\mathbf{v}$, isto é,

$$\|F_L(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|,$$

e, portanto, veremos que essa reflexão é mais um exemplo de uma matriz ortogonal.

Exemplo 12.1.

Mostre que as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ representam reflexões com respeito ao eixo-x e com respeito ao eixo-y, respectivamente.

Solução:

Lembre que o eixo-x é a reta de equação cartesiana $y = 0$ e o eixo-y é a reta de equação $x = 0$. Dado $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$Bv = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$

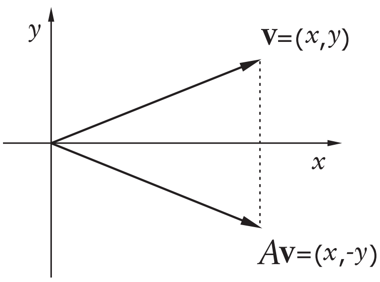


Figura 12.2.a: Reflexão no eixo-x.

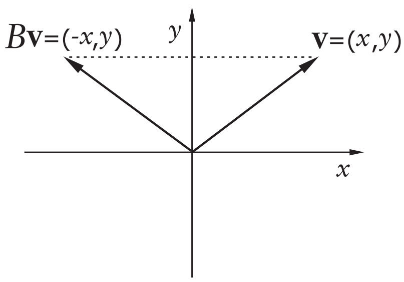


Figura 12.2.b: Reflexão no eixo-y.

Portanto, $A(x,y) = (x,-y)$, o que caracteriza uma reflexão com respeito ao eixo-x, como ilustra a **Figura 12.a.** E, analogamente, $B(x,y) = (-x,y)$ caracteriza a reflexão com respeito ao eixo-y, como mostra a **Figura 12.b.**

Exemplo 12.2.

Verifique a ação das reflexões do Exemplo 12.1 sobre um quadrado unitário de vértice na origem, como mostra a **Figura 12.2**.

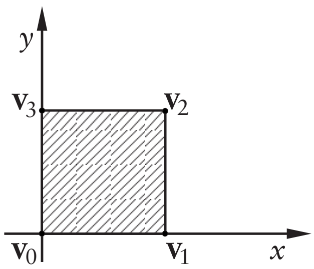


Figura 12.2: O quadrado unitário.

Solução:

O quadrado unitário da **Figura 12.2** tem como vértices $\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1)$. Vamos representar esses quatro vértices pela matriz

$$D = [\ \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

como foi visto no final da Aula 11.

1^o Caso: Reflexão com respeito ao eixo-*x*. Sabemos que essa reflexão é representada pela matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

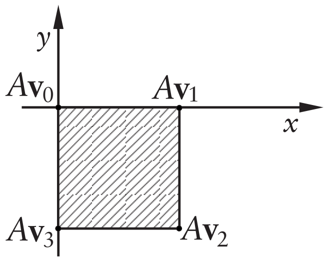


Figura 12.3: Reflexão no eixo-*x* do quadrado unitário.

A imagem dos vértices do quadrado, pela ação da reflexão com respeito ao eixo-*x*, é dada pela matriz

$$A \cdot D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a imagem é um novo quadrado de lado unitário e de vértices $A\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $A\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $A\mathbf{v}_2 = (1,-1)$ e $A\mathbf{v}_3 = (0,-1)$, como mostra a **Figura 12.3**.

2^o Caso: Reflexão com respeito ao eixo-*y*. Sabemos que essa reflexão é representada pela matriz

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

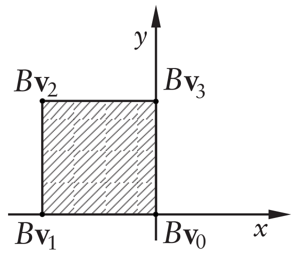


Figura 12.4: Reflexão no eixo-y do quadrado unitário.

A imagem dos vértices do quadrado, pela ação da reflexão com respeito ao eixo-y, é dada pela matriz

$$B \cdot D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, a imagem é um novo quadrado de lado unitário e de vértices $B\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $B\mathbf{v}_1 = (-1,0)$, $B\mathbf{v}_2 = (-1,1)$ e $B\mathbf{v}_3 = (0,1)$, como mostra a **Figura 12.4**.

Exemplo 12.3.

a. Obtenha a matriz que representa a reflexão com respeito à reta $L : y = -x$.

b. Verifique a ação desta reflexão sobre o quadrado unitário da **Figura 12.2**.

Solução:

a. A transformação que representa a reflexão com respeito à reta $L : y = -x$ é dada por

$$F_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$F_L(x,y) = (-y,-x)\,,$$

como ilustra a **Figura 12.5**.

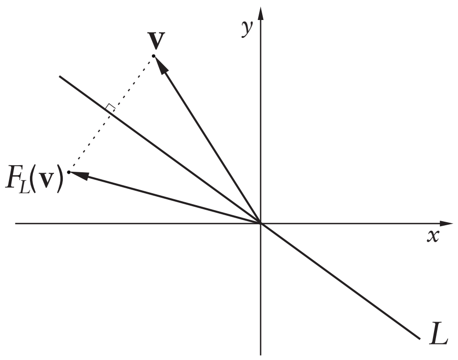


Figura 12.5: Reflexão na reta $L : y = -x$.

Como

$$\begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

então, a matriz que representa esta reflexão é dada por

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b. O quadrado unitário da **Figura 12.2** tem como vértices $\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1)$. Como no Exemplo 12.2, podemos representá-los pela matriz

$$D = [\ \mathbf{v}_0 \quad \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3\ ] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

A imagem dos vértices do quadrado, pela ação da reflexão E, é dada pela matriz

$$E \cdot D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, a imagem é um novo quadrado de lado unitário e de vértices $E\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $E\mathbf{v}_1 = (0,-1)$, $E\mathbf{v}_2 = (-1,-1)$ e $E\mathbf{v}_3 = (-1,0)$, como mostra a **Figura 12.6**.

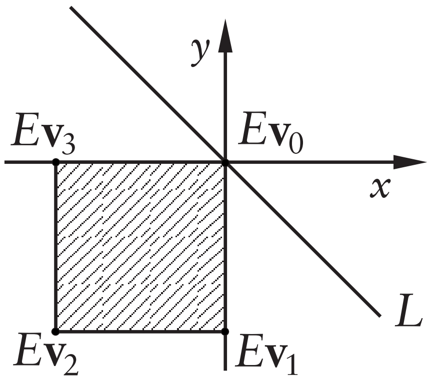


Figura 12.6: Reflexão do quadrado unitário na reta $L : y = -x$.

Uma observação interessante sobre a matriz E do exemplo anterior é que ela pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Neste produto, a matriz

$$A_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

representa uma rotação de $\pi/4$ radianos (45 graus) em torno da origem e, consequentemente,

$$A_{\pi/4}^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = A_{-\pi/4} = A_{\pi/4}^t.$$

Geometricamente, a matriz $A_{\pi/4}$ transforma a reta $L : y = -x$ no eixo-x, isto é, na reta $y = 0$, e a matriz

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

representa a reflexão com respeito ao eixo-x, como foi visto no Exemplo 12.1. Portanto, a matriz

$$E = A_{\pi/4}^{-1} \cdot F \cdot A_{\pi/4} \tag{12.1}$$

é o resultado de se aplicar uma rotação de $\pi/4$ radianos, seguida de reflexão no eixo-x e seguida de outra rotação de $-\pi/4$ radianos, como ilustra a **Figura 12.8**.

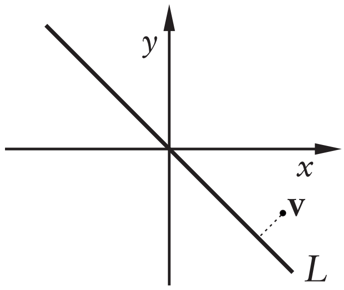


Figura 12.8.a: A reta $L : y = -x$.

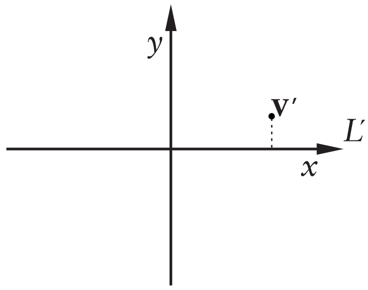


Figura 12.8.b: Após a rotação $A_{\pi/4}$.

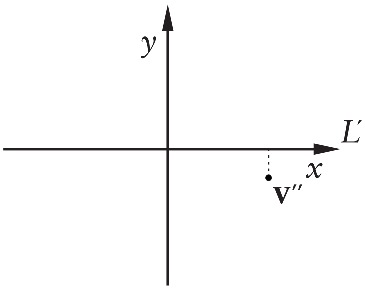


Figura 12.8.c: Após a reflexão no eixo-x.

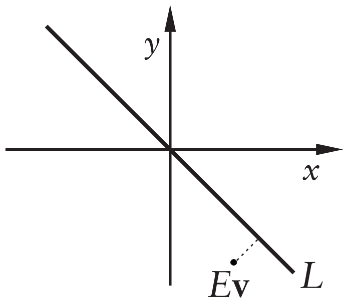


Figura 12.8.d: Após a rotação $A_{\pi/4}^{-1} = A_{-\pi/4}$.

Assim, expressamos a reflexão E como um produto de três matrizes ortogonais. No entanto, essa não é a única forma de expressar a matriz E como um produto de matrizes ortogonais. Observe que se fizermos uma rotação de $\theta = -\pi/4$, a reta $L : y = -x$ será transformada no eixo-y (isto é, na reta $x = 0$). Assim, a matriz E que representa a reflexão na reta $L : y = -x$ pode ser escrita como

$$E = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

ou seja, $E = A_{-\theta} \cdot B \cdot A_{\theta}$ é um outro produto de três matrizes ortogonais, onde $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a reflexão no eixo-y. Portanto, essa forma de expressar a matriz E como um produto de três matrizes ortogonais não é única.

Exemplo 12.4.

Determine a matriz F que representa a reflexão com respeito à reta $L : y = \sqrt{3}x$. Determine, também, a imagem do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$ por esta reflexão.

Solução:

Vamos proceder de forma análoga à do exercício anterior. Primeiramente, vamos fazer uma rotação em torno da origem de modo que a reta $L : y = \sqrt{3}x$ seja transformada no eixo-x. Não é difícil ver que precisamos fazer uma rotação de $\theta = -\pi/3$ radianos. Observe que o ângulo que a reta L forma com o semi-eixo-x positivo é $\pi/3$ radianos, conforme a **Figura 12.9**.

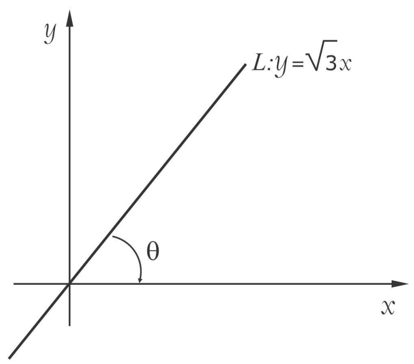


Figura 12.9: Rotação de $\theta = -\pi/3$ radianos.

Esta rotação é representada pela matriz

$$A_{-\pi/3} = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

cuja inversa é dada por

$$A^{-1}_{-\pi/3} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = A_{\pi/3}.$$

Agora, a matriz que representa a reflexão no eixo-x é dada por

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz que representa a reflexão na reta $L: y = \sqrt{3}x$ é dada por

$$\begin{aligned} E &= A^{-1}_{-\pi/3} \cdot F \cdot A_{-\pi/3} \\ &= A_{\pi/3} \cdot F \cdot A_{-\pi/3} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A imagem do ponto $P = (\sqrt{3}, 1)$, após uma reflexão na reta $L: y = \sqrt{3}x$, é

$$E(P) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

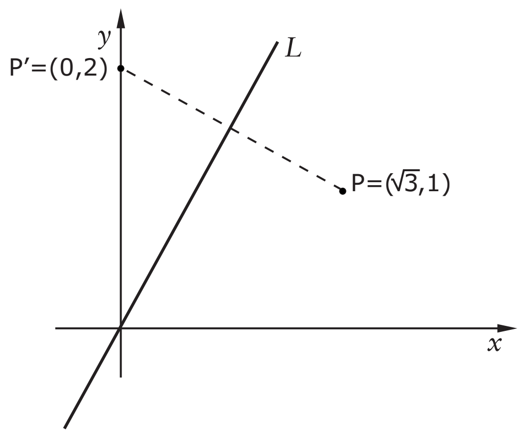


Figura 12.10: Reflexão de $P = (\sqrt{3}, 1)$ na reta $L: y = \sqrt{3}x$.

✍ Dada uma reta L passando pela origem, nem sempre é fácil obter uma expressão simples para o ângulo que ela forma como o eixo-x. Por isso, vejamos uma outra forma para se obter a matriz E que representa a reflexão nessa reta L. Inicialmente, vamos analisar como isso é feito para o exemplo anterior, ou seja, determinar a matriz E que representa uma reflexão na reta $L: y = \sqrt{3}x$.

Escolhemos a seguinte base ortonormal $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v}_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ é um vetor tangente à reta $L: y = \sqrt{3}x$ e $\mathbf{v}_2 = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ é um vetor normal à reta L, como indica a **Figura 12.11**.

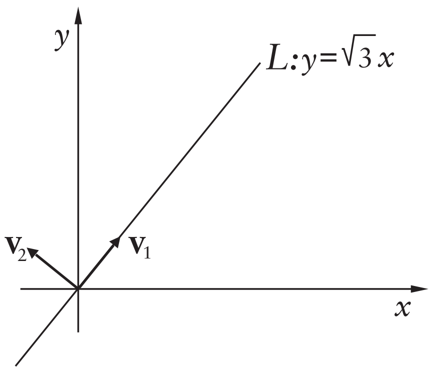


Figura 12.11: Base ortonormal $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Como a matriz E representa a reflexão com respeito à reta L, temos que

$$\begin{array}{l} E\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 \ \ e \\ E\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + (-1) \cdot \mathbf{v}_2, \end{array}$$

conforme a **Figura 12.11**.

Assim, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é a matriz que representa a reflexão na reta L com respeito à base β. A matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} = [\mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2]$$

é a matriz mudança de base, da base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Logo, pela teoria de mudança de base vista no curso de Álgebra Linear I, a matriz E é dada por

$$\begin{array}{rcl} E & = & A \cdot F \cdot A^{-1} = A \cdot F \cdot A^t \\ & = & \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ & = & \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}. \end{array}$$

De um modo geral, a matriz E que representa a reflexão, com respeito a uma reta L passando pela origem, é dada por

$$E = P \cdot [E]_\beta \cdot P^t,$$

onde $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ em que

$\mathbf{v}_1$ é um vetor unitário tangente à reta L,
$\mathbf{v}_2$ é um vetor unitário normal à reta L,

e a matriz

$$P = [\mathbf{v}_1 \;\; \mathbf{v}_2],$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, é a matriz mudança de base, da base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para a base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, e a matriz $[E]_\beta$ é a matriz que representa a reflexão na reta L com respeito à base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, dada por

$$[E]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

pois,

$$\begin{array}{l} E\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 = 1 \cdot \mathbf{v}_1 + 0 \cdot \mathbf{v}_2 \;\; e \\ E\mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 = 0 \cdot \mathbf{v}_1 + (-1) \cdot \mathbf{v}_2, \end{array}$$

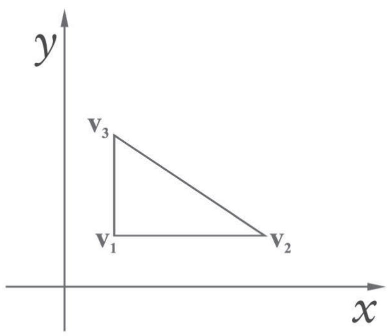
como ilustra a **Figura 12.11**. Observe também que sendo P uma matriz ortogonal então $P^{-1} = P^t$.

Exercício 12.1.

1. Determine a matriz E que representa a reflexão na reta $L : 3x + 2y = 0$.

2. Determine a matriz B que representa a reflexão com respeito à reta $y = -2x$.

3. Determine a imagem dos vértices da figura abaixo após uma reflexão na reta $y = -2x$. Os vértices são:
$\mathbf{v}_1 = (1,1), \mathbf{v}_2 = (4,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,3)$.



Aula 13

Propriedades das Rotações e Reflexões no Plano – 1ª Parte

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender algumas propriedades geométricas das matrizes de rotação e reflexão;
2. compreender a diagonalização das matrizes de rotação e reflexão.

PROPRIEDADES DAS ROTAÇÕES E REFLEXÕES NO PLANO – 1ª PARTE

Pré-requisitos:
Aulas 10, 11 e 12.

Nesta aula, vamos mostrar algumas propriedades elementares das matrizes ortogonais 2×2. Nas aulas anteriores, vimos que as rotações e as reflexões são exemplos de matrizes ortogonais. Veremos que estas são as únicas matrizes ortogonais de $\mathbb{R}^2$.

Vamos considerar o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ junto com o produto interno usual, visto na Aula 9. Queremos então responder à seguinte pergunta: quais são as matrizes ortogonais de ordem 2, isto é, quais as matrizes de ordem 2 que preservam o produto interno ou, ainda, para quais matrizes $A \in M_2(\mathbb{R})$ vale que

$$\langle A\mathbf{u}, A\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \text{ para todo } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2?$$

Dada uma matriz ortogonal A de ordem 2, sejam $\mathbf{e}_1 = (1,0)$ e $\mathbf{e}_2 = (0,1)$ os vetores unitários da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Denotamos $A\mathbf{e}_1$ a imagem do vetor $\mathbf{e}_1$ pela matriz A. Sendo A uma matriz ortogonal, vale que

$$\|A\mathbf{e}_1\| = \|\mathbf{e}_1\| = 1,$$

isto é, $A\mathbf{e}_1$ também é um vetor unitário, como ilustra a **Figura 13.1**

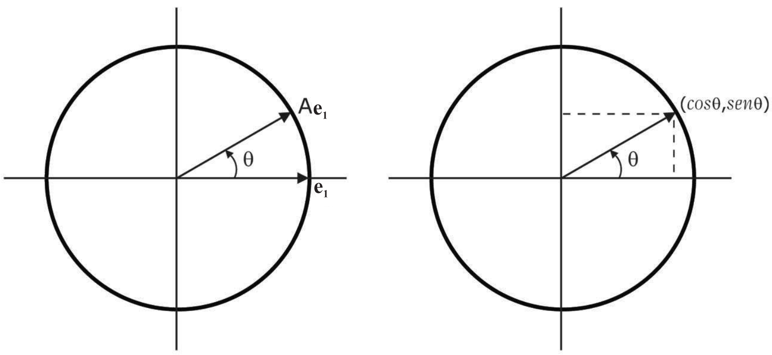


Figura 13.1: A imagem $A\mathbf{e}_1$ do vetor $\mathbf{e}_1$.

Denotamos por θ o ângulo formado pelo vetor $A\mathbf{e}_1$ e o semi-eixo-x positivo (**Figura 13.1**). Assim,

$$A\mathbf{e}_1 = (\cos\theta,\ \text{sen}\ \theta)$$

é a primeira coluna da matriz ortogonal $A \in M_2(\mathbb{R})$, isto é,

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & * \\ \operatorname{sen}\theta & * \end{pmatrix}.$$

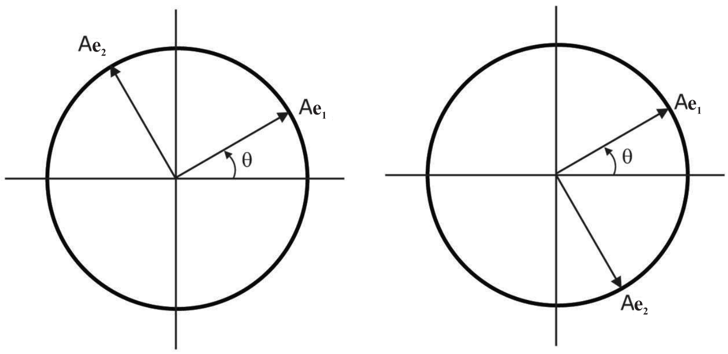
Vejamos, agora, o que acontece com o outro vetor $\mathbf{e}_2$ da base canônica. Se $A\mathbf{e}_2$ denota a imagem do vetor $\mathbf{e}_2$ pela matriz ortogonal A, temos que

$$\|A\mathbf{e}_2\| = \|\mathbf{e}_2\| = 1.$$

Além disso,

$$\langle A\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2\rangle = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = 0,$$

e isto quer dizer que o vetor $A\mathbf{e}_2$ é ortogonal ao vetor $A\mathbf{e}_1$. Assim, teremos duas possibilidades para este vetor, como mostra a **Figura 13.2**.



a. Primeiro caso b. Segundo caso

Figura 13.2: As duas possibilidades para o vetor Ae_2.

Podemos observar que o ângulo que o vetor $A\mathbf{e}_2$ forma com o eixo-x é igual a $\theta + \frac{\pi}{2}$ (**Figura 13.2a**) ou igual a $\theta - \frac{\pi}{2}$ (**Figura 13.2b**). Sendo assim, o vetor unitário $A\mathbf{e}_2$ pode ser escrito na forma

$$A\mathbf{e}_2 = (\cos(\theta + \pi/2),\ \operatorname{sen}(\theta + \pi/2))$$
$$\text{ou}$$
$$A\mathbf{e}_2 = (\cos(\theta - \pi/2),\ \operatorname{sen}(\theta - \pi/2)).$$

Aplicando as fórmulas de adição de arcos da Trigonometria, temos que

$$\begin{aligned}
\cos(\theta+\pi/2) &= -\ \operatorname{sen}\theta\\
\operatorname{sen}(\theta+\pi/2) &= \cos\theta\\
\cos(\theta-\pi/2) &= \ \operatorname{sen}\theta\\
\operatorname{sen}(\theta-\pi/2) &= -\cos\theta,
\end{aligned}$$

logo, o vetor $A\mathbf{e}_2$ pode ser escrito na forma

$$A\mathbf{e}_2 = (-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta\,)$$
$$\text{ou}$$
$$A\mathbf{e}_2 = (\operatorname{sen}\theta,\ -\cos\theta\,).$$

Consequentemente, a segunda coluna da matriz A é dada por

$$\begin{pmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\theta \\ -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Assim, temos duas possibilidades para a matriz ortogonal A de ordem 2:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Portanto, esta discussão responde à nossa pergunta inicial que pode ser resumida no seguinte teorema.

Teorema 13.1.

Uma matriz $A \in M_2(\mathbb{R})$ é ortogonal se e somente se existe um número θ tal que

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

ou

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Geometricamente, considerada como uma transformação linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$, a matriz

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

descreve uma *rotação* em torno da origem, mais especificamente, descreve uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, respeitando a convenção da rotação ser no sentido anti-horário quando θ for positivo e no sentido horário quando θ for negativo. Veja a **Figura 13.3**

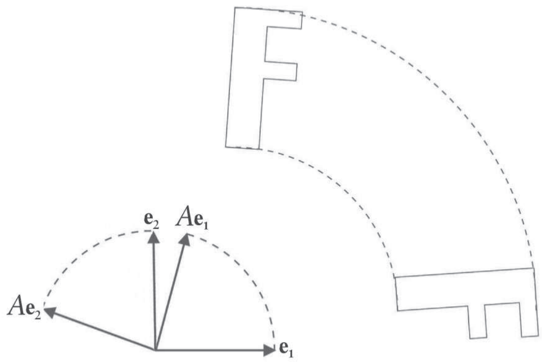


Figura 13.3: Rotação de um ângulo θ entre $\mathbf{e}_1$ e $A\mathbf{e}_1$.

Por outro lado, a matriz

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

descreve a *reflexão* com respeito à reta que faz ângulo de $\theta/2$ com o semi-eixo positivo dos x. Veja a **Figura 13.4**.

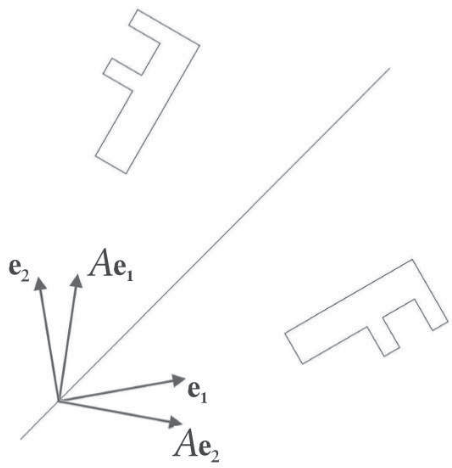


Figura 13.4: Reflexão na reta que bissecta o ângulo θ entre $\mathbf{e}_1$ e $A\mathbf{e}_1$.

Vejamos, agora, algumas propriedades elementares das matrizes ortogonais de ordem 2. No que segue, denotaremos por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

a matriz que representa a rotação de θ radianos em torno da origem, e por

$$B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$$

a matriz que representa a reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\varphi/2$ com o semi-eixo-x positivo.

Teorema 13.2.

1. $\det(A_\theta) = 1$ e $\det(B_\varphi) = -1$.
2. $A_\theta^{-1} = A_{-\theta}$ e $B_\varphi^{-1} = B_\varphi$.

Demonstração

1. Sendo

   $$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ e } B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix},$$

   temos que

   $$\det(A_\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

   e

   $$\det(B_\varphi) = -\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\varphi = -1.$$

2. Do curso de Álgebra Linear I sabemos que se

   $$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   então sua inversa é dada por

   $$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

   Aplicando essa fórmula à matriz A_θ, obtemos

   $$A_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

pois $\det(A_\theta) = 1$.

Como

$$\cos(-\theta) = \cos\theta \text{ e } \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta,$$

então, obtemos

$$\begin{aligned} A_\theta^{-1} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\operatorname{sen}(-\theta) \\ \operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \\ &= A_{-\theta}. \end{aligned}$$

Isto é, A_θ^{-1} é uma rotação do ângulo $-\theta$ radianos.

Analogamente, como $\det(B_\varphi) = -1$, temos

$$\begin{aligned} B_\varphi^{-1} &= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -\cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= B_\varphi. \end{aligned}$$

Exemplo 13.1.

Mostre que A_θ possui apenas autovalores reais se e somente se $\theta = n\pi$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Solução:

O polinômio característico de A_θ é dado por

$$\begin{aligned} \det(xI_2 - A_\theta) &= \begin{vmatrix} x-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & x-\cos\theta \end{vmatrix} \\ &= (x-\cos\theta)^2 + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= x^2 - 2(\cos\theta)x + \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \\ &= x^2 - 2(\cos\theta)x + 1\ . \end{aligned}$$

Este polinômio possui raízes reais se e somente se $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 \geq 0$, ou seja, se e somente se $\cos^2\theta \geq 1$. E como $\cos^2\theta$ assume valor máximo 1, então $\cos^2\theta \geq 1$ se e somente se $\cos^2\theta = 1$. E $\cos^2\theta = 1$ se e somente se $\cos\theta = 1$ ou $\cos\theta = -1$. E isto acontece se e somente se $\theta = n\pi$ com $n \in \mathrm{Z}$. Portanto, a matriz A_θ tem de ser da forma

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } A_\theta = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cujos autovalores são 1 e -1, respectivamente. Logo, se o ângulo θ não for múltiplo de π, a matriz rotação A_θ não possui autovalores reais e, portanto, não é diagonalizável. Quando $\theta = n\pi$, com $n \in \mathbb{Z}$, temos que a matriz A_θ é diagonalizável.

Exemplo 13.2.

Calcule os autovalores da matriz reflexão B_φ e mostre que ela é diagonalizável.

Solução:

O polinômio característico de B_φ é dado por

$$\begin{aligned}
\det(xI_2 - B_\varphi) &= \begin{vmatrix} x - \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & x + \cos\varphi \end{vmatrix} \\
&= (x - \cos\varphi)(x + \cos\varphi) - \operatorname{sen}^2\varphi \\
&= x^2 - \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \\
&= x^2 - 1\,.
\end{aligned}$$

Portanto, os autovalores de B_φ são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$. Como B_φ possui dois autovalores distintos, segue que B_φ é diagonalizável.

Exercício 13.1.

1. Verifique que toda matriz de reflexão B_φ pode ser escrita como o produto de uma matriz de rotação pela matriz de reflexão no eixo-x.

Aula 14

PROPRIEDADES DAS ROTAÇÕES E REFLEXÕES NO PLANO – 2ª PARTE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender algumas propriedades geométricas das matrizes de rotação e reflexão;
2. compreender a diagonalização das matrizes de rotação e reflexão.

PROPRIEDADES DAS ROTAÇÕES E REFLEXÕES NO PLANO – 2ª PARTE

Pré-requisitos: Aulas 10, 11, 12 e 13.

Nesta aula veremos como se comportam as transformações de rotação e reflexão no plano quando combinadas entre si. É fácil verificar que o produto de matrizes ortogonais é novamente uma matriz ortogonal (Exercício 1). Mas no caso específico de matrizes de ordem 2 é possível calcular estes produtos e interpretá-los geometricamente.

Nas aulas anteriores, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, trabalhamos com as matrizes

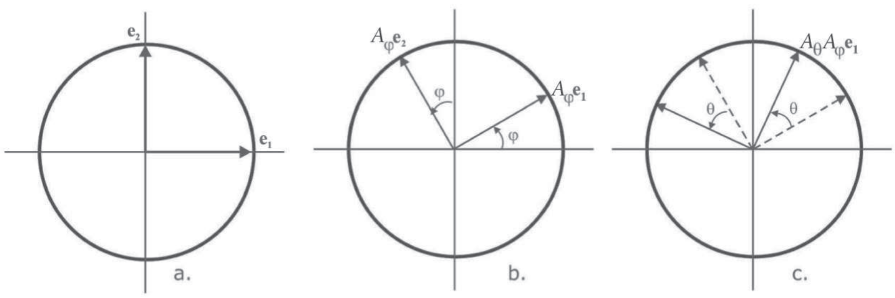
$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ e } B_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Geometricamente, a matriz A_θ representa uma rotação de θ radianos e a matriz B_φ representa uma reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\varphi/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo.

Queremos determinar como essas matrizes se comportam com respeito à multiplicação, isto é, como se comportam as matrizes

$$A_\theta\, A_\varphi,\; A_\theta\, B_\varphi,\; B_\varphi\, A_\theta \text{ e } B_\theta\, B_\varphi.$$

Vamos ver, inicialmente, o que estes produtos significam geometricamente e, em seguida, vamos determinar sua descrição algébrica:



a. Os vetores da base canônica.

b. Uma rotação de φ.

c. Depois, uma rotação de θ.

Figura 14.1

Para obter a descrição algébrica de $A_\theta A_\varphi$ vamos precisar, mais uma vez, das fórmulas de adição de arcos:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \text{ e}$$
$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a.$$

Algebricamente, temos que $A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi}$, pois

$$\begin{aligned} A_\theta A_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\text{sen }\theta \\ \text{sen }\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\text{sen }\varphi \\ \text{sen }\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \text{sen }\theta \text{ sen }\varphi & -\cos\theta \text{ sen}\varphi - \text{sen }\theta\cos\varphi \\ \text{sen }\theta\cos\varphi + \cos\theta \text{ sen }\varphi & -\text{sen }\theta \text{ sen }\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\text{sen}(\theta+\varphi) \\ \text{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} \\ &= A_{\theta+\varphi}\ . \end{aligned}$$

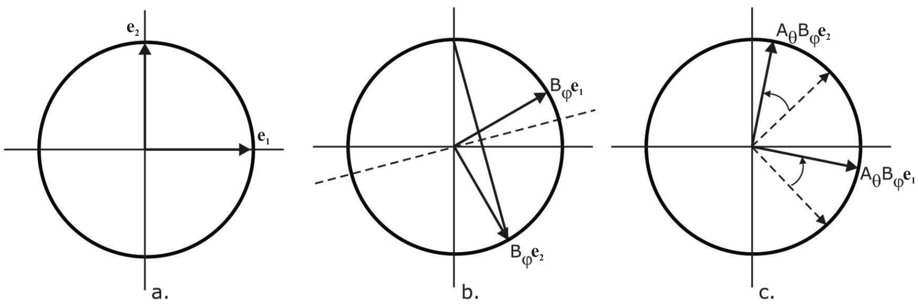
Observe que $A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi} = A_{\varphi+\theta} = A_\varphi A_\theta$ e isto quer dizer que as matrizes A_θ e A_ϕ comutam. Também são válidas as igualdades

$$A_\theta^2 = A_\theta A_\theta = A_{\theta+\theta} = A_{2\theta}$$

$$A_\theta^3 = A_\theta^2 A_\theta = A_{2\theta+\theta} = A_{3\theta}$$

e, assim, sucessivamente.

2. $A_\theta B_\varphi$: Temos, aqui, uma reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\varphi/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo seguida de uma rotação de θ radianos. Veja a **Figura 14.2** .



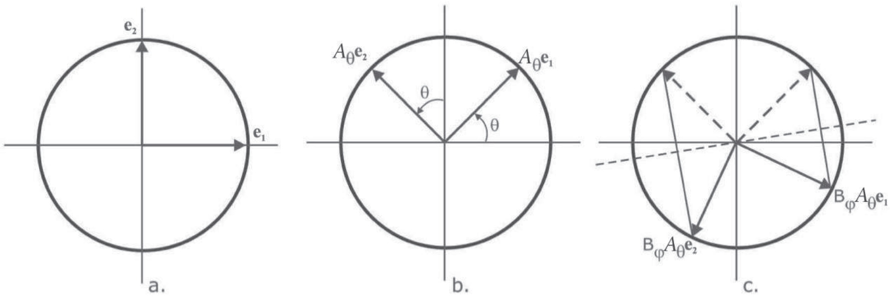
a. Os vetores da base canônica. b. Uma reflexão em $\varphi/2$. c. Depois, uma rotação de θ.

Figura 14.2

Algebricamente, temos que $A_\theta B_\varphi = B_{\theta+\varphi}$, o que nos dá uma nova reflexão, agora, em torno da reta que forma um ângulo de $(\theta+\varphi)/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo. Vamos verificar isso:

$$\begin{aligned}
A_\theta B_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & \operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & -\cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} \\
&= B_{\theta+\varphi}\,.
\end{aligned}$$

3. $B_\varphi A_\theta$: Temos, agora, uma rotação de θ radianos seguida de uma reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\varphi/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo. Veja a **Figura 14.3**.



a. Os vetores da base canônica.

b. Uma rotação de θ.

c. Depois, uma reflexão em $\varphi/2$.

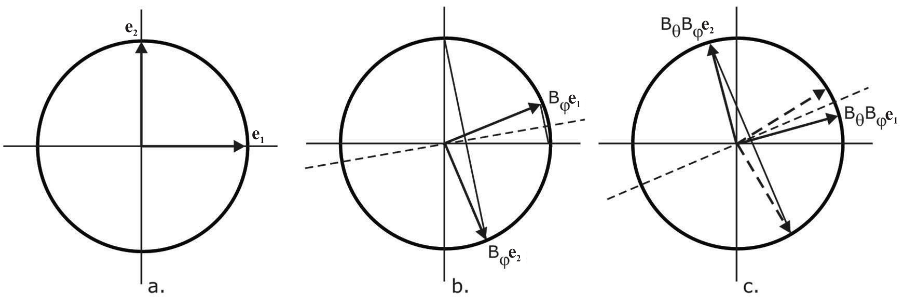
Figura 14.3

Algebricamente, temos que $B_\varphi A_\theta = B_{\varphi-\theta}$, o que nos dá uma nova reflexão, agora, em torno da reta que forma um ângulo de $(\varphi-\theta)/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo. Vamos verificar isso:

$$
\begin{aligned}
B_\varphi A_\theta &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\theta + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & -\cos\varphi\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\cos\theta - \cos\varphi\operatorname{sen}\theta & -\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta - \cos\varphi\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\varphi-\theta) & \operatorname{sen}(\varphi-\theta) \\ \operatorname{sen}(\varphi-\theta) & -\cos(\varphi-\theta) \end{pmatrix} \\
&= B_{\varphi-\theta}\ .
\end{aligned}
$$

Como, em geral, $B_{\varphi+\theta} \neq B_{\varphi-\theta}$, temos que $A_\theta B_\varphi \neq B_\varphi A_\theta$, ou seja, as matrizes A_θ e B_φ não comutam em geral.

4. $B_\theta B_\varphi$: Nesse último caso, temos uma reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\varphi/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo seguida de outra reflexão com respeito à reta que forma um ângulo de $\theta/2$ radianos com o semi-eixo-x positivo. Veja a **Figura 14.4**.



a. Os vetores da base canônica. b. Reflexão em $\varphi/2$. c. Depois, reflexão em $\theta/2$.

Figura 14.4

Algebricamente, temos que $B_\theta B_\varphi = A_{\theta-\varphi}$, o que nos dá uma rotação de $\theta - \varphi$ radianos, pois

$$
\begin{aligned}
B_\theta B_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi - \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \cos\theta\cos\varphi \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\theta-\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta-\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta-\varphi) & \cos(\theta-\varphi) \end{pmatrix} \\
&= A_{\theta-\varphi}\,.
\end{aligned}
$$

Como, em geral, $A_{\varphi+\theta} \neq A_{\theta-\varphi}$, temos que $B_\theta B_\varphi \neq B_\varphi B_\theta$, ou seja, as matrizes B_θ e B_φ não comutam em geral.

Resumindo, temos as seguintes igualdades:

$$
\begin{cases} A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi} \\ A_\theta B_\varphi = B_{\theta+\varphi} \\ B_\varphi A_\theta = B_{\varphi-\theta} \\ B_\theta B_\varphi = A_{\theta-\varphi}\,, \end{cases}
$$

as quais podemos interpretar como: rotação seguida de rotação é uma rotação; reflexão seguida de rotação é reflexão; rotação seguida de reflexão é reflexão e reflexão seguida de reflexão é rotação.

Exemplo 14.1.

Calcule a imagem do quadrado unitário, veja a **Figura 14.5**, quando refletido na reta $y = \sqrt{3}x$ e, em seguida, rodado de um ângulo de $\pi/3$ radianos.

Solução:

O quadrado unitário tem vértices $\mathbf{v}_0 = (0,0)$, $\mathbf{v}_1 = (1,0)$, $\mathbf{v}_2 = (1,1)$ e $\mathbf{v}_3 = (0,1)$. Veja a **Figura 14.5**.

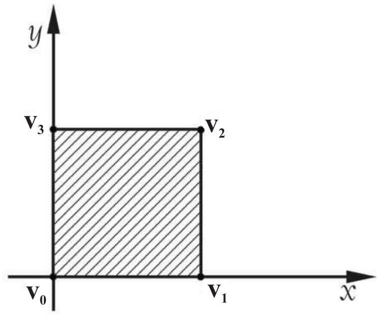


Figura 14.5: **O quadrado unitário.**

Como a reta $y = \sqrt{3}x$ tem coeficiente angular $\sqrt{3} = \operatorname{tg}(\pi/3)$, ela forma um ângulo de $\pi/3$ radianos com o semi-eixo-x positivo. Veja a **Figura 14.6**.

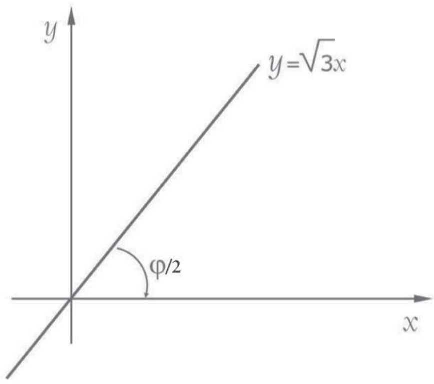


Figura 14.6: **Inclinação com ângulo de $\varphi/2 = \pi/3$.**

A um ângulo de inclinação de $\varphi/2 = \pi/3$ radianos da reta de reflexão, corresponde uma matriz de reflexão B_φ com $\varphi = 2\pi/3$. Assim, sabemos que a matriz que representa a reflexão com respeito à reta $y = \sqrt{3}x$ é dada por

$$B_{2\pi/3} \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & \operatorname{sen}(2\pi/3) \\ \operatorname{sen}(2\pi/3) & -\cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

A matriz de rotação de ângulo $\theta = \pi/3$ radianos é dada por

$$A_{\pi/3} \quad = \quad \begin{pmatrix} \cos(\pi/3) & -\operatorname{sen}(\pi/3) \\ \operatorname{sen}(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Agora, do que acabamos de ver,

$$A_{\pi/3}B_{2\pi/3} \quad = \quad B_{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}} = B_{\pi} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que é a reflexão no eixo-y. Se representarmos o quadrado unitário pela matriz 2×4

$$D = [\mathbf{v}_0 \ \ \mathbf{v}_1 \ \ \mathbf{v}_2 \ \ \mathbf{v}_3],$$

cujas colunas são os vértices do quadrado, sua imagem é dada por

$$\begin{aligned}(A_{\pi/3}B_{2\pi/3})(D) &= B_{\pi}D \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ou seja, a imagem é o quadrado unitário de vértices $(0,0)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$ e $(0,1)$. Veja a **Figura 14.7**.

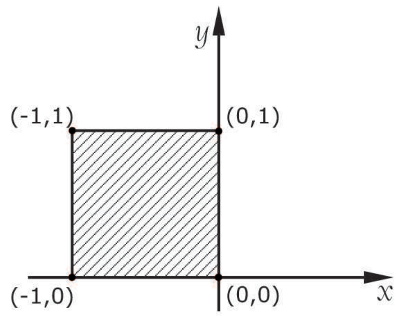
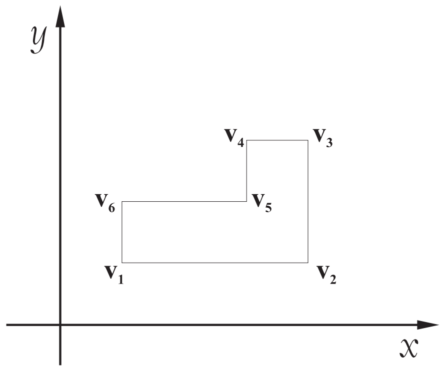


Figura 14.7: Quadrado imagem.

Exercício 14.1.

1. Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é matriz ortogonal.

2. Determine a imagem dos vértices da figura abaixo após uma reflexão com respeito à reta $y = -x$, seguida de uma rotação de $\pi/4$ radianos. Os vértices são: $\mathbf{v}_1 = (1,1)$; $\mathbf{v}_2 = (4,1)$; $\mathbf{v}_3 = (4,3)$; $\mathbf{v}_4 = (3,3)$; $\mathbf{v}_5 = (3,2)$ e $\mathbf{v}_6 = (1,2)$.



Aula 15

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 1ª PARTE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. aplicar os conceitos de ortogonalidade vistos nas aulas de 9 a 14;
2. aplicar as propriedades de ortogonalidade vistas nas aulas 9 a 14.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 1ª PARTE

Pré-requisitos: Você deve ter claras as ideias apresentadas nas Aulas 9 a 14.

Antes de prosseguirmos com o estudo das matrizes ortogonais de ordem 3, faremos uma pequena pausa na apresentação para exercitarmos o conteúdo visto até agora. Nas próximas duas aulas, você terá a sua disposição uma lista de exercícios para tentar resolver e, depois, conferir com as soluções apresentadas.

A idéia é que você, primeiro, tente resolver cada um dos exercícios, usando, se necessário, as anotações das aulas anteriores, e só depois de obtida a sua própria solução, compare-a com a solução apresentada aqui. Caso você não consiga resolver algum exercício, não se aflija e leia atentamente a solução correspondente. Também não hesite em procurar ajuda do tutor.

Exercício 15.1.

1. Determine o valor da constante $k \in \mathbb{R}$ para que os vetores $\mathbf{u} = (1,2,k,3)$ e $\mathbf{v} = (3,k,7,-5)$ sejam ortogonais.

2. Mostre que $\mathbf{u}_1 = (2,-3)$ e $\mathbf{u}_2 = (6,4)$ formam uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Determine as componentes de $\mathbf{w} = (9,-7)$ nesta base. Construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ usando os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$.

3. Verifique que os vetores $\mathbf{u}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1,4,1)$ e $\mathbf{u}_3 = (2,1,-2)$ são ortogonais. Construa uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ partindo de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$.

4. Seja $\mathbf{u} = (1,\ 2) \in \mathbb{R}^2$. Descreva o conjunto $S = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$ e determine uma base para S.

5. Repita o exercício anterior no caso de $\mathbf{u} = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$.

6. Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$ é ortogonal.

7. Mostre que $A = \begin{pmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$ é uma matriz ortogonal.

8. Determine todos os valores $x,\ y \in \mathbb{R}$, de modo que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ seja ortogonal. Em cada caso, identifique se a matriz A representa uma rotação ou uma reflexão.

SOLUÇÕES

1. Sendo **u** e **v** ortogonais, temos que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. Como

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle (1,2,k,3), (3,k,7,-5) \rangle ,$$

então

$$9k - 12 = 0$$
$$k = \frac{4}{3}.$$

2. Como os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são ortogonais, pois

$$\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle (2,-3), (6,4) \rangle = 2 \cdot 6 + (-3) \cdot 4 = 0,$$

eles são linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$. Sendo $\mathbb{R}^2$ um espaço vetorial de dimensão 2, segue que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Para determinarmos as componentes de $\mathbf{w} = (9,-7)$ nesta base, devemos encontrar escalares a e b, tais que $\mathbf{w} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, ou seja,

$$(9,-7) = a\,(2,-3) + b\,(6,4),$$

o que nos leva ao sistema

$$\begin{cases} 2a + 6b = 9 \\ -3a + 4b = -7 , \end{cases}$$

cuja solução é $a = 3$ e $b = 1/2$. Portanto, na base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, temos

$$\mathbf{w} = 3\mathbf{u}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{u}_2,$$

isto é, $\mathbf{w} = [3, 1/2]_\beta$.

Já sabemos que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. Para transformá-la numa base ortonormal, basta normalizar $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$. Como

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \text{ e}$$
$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13},$$

então os vetores

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right) \text{ e}$$

$$\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$$

formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$.

3. Temos que

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= \langle (1,0,1), (-1,4,1) \rangle = -1+0+1 = 0; \\
\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle &= \langle (1,0,1), (2,1,-2) \rangle = 2+0-2 = 0; \\
\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle &= \langle (-1,4,1), (2,1,-2) \rangle = -2+4-2 = 0.
\end{aligned}$$

Assim, os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$ são ortogonais. Portanto, eles são linearmente independentes e, como $\mathbb{R}^3$ é um espaço vetorial de dimensão 3, segue que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Como no exercício anterior, para obter agora uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ basta normalizar os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$. Verificamos que

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{2};\ \|\mathbf{u}_2\| = 3\sqrt{2} \text{ e } \|\mathbf{u}_3\| = 3.$$

Daí, temos que

$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{-1}{3\sqrt{2}}, \frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)$ e

$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. Temos que $\mathbf{v} = (x,y) \in S$ se e somente se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, onde $\mathbf{u} = (1,2)$, isto é, se e somente se

$$x + 2y = 0,$$

ou seja, quando $x = -2y$. Logo, S é formado por todos os vetores da forma $\mathbf{v} = (-2y, y)$, $y \in \mathbb{R}$, ou seja, $S = \{t(-2,1)\ |t \in \mathbb{R}\}$. Assim, vemos que S é gerado pelo vetor $(-2,1)$, ou seja, tem como uma base $\{(-2,1)\}$; portanto, é um subespaço vetorial de dimensão 1 (chamado *complemento ortogonal* do subespaço gerado por $(1,2)$).

5. O complemento ortogonal de $\mathbf{u} = (1,2,1) \in \mathbb{R}^3$ é composto dos vetores $\mathbf{v} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, tais que $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, ou seja,

$$\langle (1,2,1), (x,y,z) \rangle = 0,$$

e, portanto, $x + 2y + z = 0$, ou $x = -2y - z$. Assim, todos os vetores da forma

$$\mathbf{v} = (-2y - z, y, z) \text{ com } y,\ z \in \mathbb{R}$$

são ortogonais a $\mathbf{u} = (1,2,1)$. Logo,

$$\begin{aligned} S &= \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0\} \\ &= \{(-2y - z, y, z) \mid y,\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(-2,1,0) + z(-1,0,1) \mid y,\ z \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Veja que o subespaço S é gerado pelos vetores linearmente independentes $(-2,1,0)$ e $(-1,0,1)$. Portanto, S é um subespaço de dimensão 2. Geometricamente, S é o plano de $\mathbb{R}^3$ pela origem gerado pelos vetores $(-2,1,0)$ e $(-1,0,1)$.

6. Temos que

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

logo, A é ortogonal. Observe também que as colunas de A são vetores ortonormais de $\mathbb{R}^2$.

7. Observe que as colunas da matriz A,

$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$, $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{8}{9}, -\frac{4}{9}, \frac{1}{9}\right)$, $\mathbf{u}_3 = \left(-\frac{4}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{4}{9}\right)$, satisfazem:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= \frac{8}{81} - \frac{16}{81} + \frac{8}{81} = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle &= -\frac{4}{81} - \frac{28}{81} + \frac{32}{81} = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle &= -\frac{32}{81} + \frac{28}{81} + \frac{4}{81} = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle &= \frac{1}{81} + \frac{16}{81} + \frac{64}{81} = 1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle &= \frac{64}{81} + \frac{16}{81} + \frac{1}{81} = 1 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_3 \rangle &= \frac{16}{81} + \frac{49}{81} + \frac{16}{81} = 1. \end{aligned}$$

Assim, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ e, portanto, a matriz A é ortonormal.

8. Para que a matriz $A = \begin{pmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ seja ortogonal, devemos ter

$$\begin{aligned} &\langle (x,-1),(x,-1)\rangle = x^2+1 = 1, \text{ logo, } x = 0; \\ &\langle (y,0),(y,0)\rangle = y^2 = 1, \text{ logo, } y = \pm 1. \end{aligned}$$

Assim, obtemos as duas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\det(A_1) = 1$, temos que A_1 representa uma rotação. Logo,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observando esta igualdade, temos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = -1 \\ \cos\theta = 0\,, \end{cases}$$

logo, $\theta = 3\pi/2$. Assim, A_1 é uma rotação de $3\pi/2$ ou, equivalentemente, uma rotação de $-\pi/2$.

Por outro lado, $\det(A_2) = -1$ e, assim, A_2 é uma reflexão. Logo,

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

Observando a igualdade anterior, temos que:

$$\begin{cases} \operatorname{sen}\theta = -1 \\ \cos\theta = 0\,, \end{cases}$$

logo, $\theta = 3\pi/2$. Portanto, A_2 é uma reflexão com respeito à reta que forma com o eixo-x um ângulo de $\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$. Mas esta é a reta de equação $y = -x$.

Aula 16

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 2$^{\underline{A}}$ PARTE

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. aplicar os conceitos de ortogonalidade vistos nas aulas de 9 a 14;
2. aplicar as propriedades de ortogonalidade vistas nas aulas 9 a 14.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS – 2ª PARTE

Nesta aula daremos continuidade à sequência de exercícios iniciada na aula anterior. Salientamos que você primeiro tente resolver cada um dos exercícios usando, se necessário, as anotações das aulas anteriores, e só depois de obtida a sua própria solução, compare-a com a solução apresentada aqui. Caso você não consiga resolver algum exercício, não se aflija e leia atentamente a solução correspondente. Também não hesite em procurar ajuda do tutor.

Exercício 16.1.

1. Determine os valores m, $n \in \mathbb{R}$ para que a matriz $A = \begin{pmatrix} m & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ n & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ seja ortogonal.

2. Obtenha todas as matrizes ortogonais de ordem 2, tais que sua primeira coluna seja um vetor paralelo e com o mesmo sentido de $\mathbf{u} = (1,2)$.

3. Obtenha uma matriz ortogonal de ordem 3, tal que sua primeira coluna seja um vetor paralelo a $\mathbf{u} = (1,2,2)$.

4. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$. Responda às seguintes perguntas:

   a. Suas colunas formam vetores ortogonais de $\mathbb{R}^3$?

   b. Suas linhas formam vetores ortogonais?

   c. A é uma matriz ortogonal?

5. Determine todas as matrizes ortogonais de ordem 2 da forma $A = \begin{pmatrix} 1/3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$.

6. Determine todas as matrizes ortogonais de ordem 3, tais que suas duas primeiras colunas sejam vetores paralelos aos vetores $(1,1,1)$ e $(0,-1,1)$, respectivamente.

7. Sejam A_1, A_2, B_1 e B_2 matrizes de ordem 2, tais que:

a. A_1 é uma rotação de $\pi/6$ radianos;

b. A_2 é uma rotação de $5\pi/6$ radianos;

c. B_1 é uma reflexão com respeito à reta $y = x$;

d. B_2 é uma reflexão com respeito à reta $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

Calcule as matrizes A_1^2; A_1^3; B_1^2; A_1B_1; A_2B_2; B_1A_1; A_1^{-1} e B_2^{-1}.

8. Sejam A e B matrizes ortogonais de ordem n. Mostre que:

   a. A^{-1} e A^t são matrizes ortogonais;

   b. AB é uma matriz ortogonal.

SOLUÇÕES

1. As colunas de A são os vetores $\mathbf{u} = (m,n)$ e $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Para que A seja ortogonal devemos ter:

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{m^2+n^2} = 1$$

e

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \left\langle (m,n), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\rangle = 0,$$

o que nos dá o sistema

$$\begin{cases} m^2+n^2 = 1 \\ m+n = 0\,. \end{cases}$$

Da segunda equação temos $n = -m$ e, substituindo na primeira equação, obtemos $2m^2 = 1$, o que nos dá $m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Obtemos, assim, duas matrizes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Observe que A_1 é uma rotação e A_2 é uma reflexão.

2. Normalizando o vetor $\mathbf{u} = (1,2)$ obtemos o vetor $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$, que será a primeira coluna da matriz desejada. Como a segunda coluna (m,n) tem que ser ortogonal a u, obtemos os vetores $\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

e $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$. Assim, obtemos as duas matrizes ortogonais

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

3. Normalizando o vetor $\mathbf{u} = (1,\ 2,\ 2)$ obtemos o vetor $\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, que será a primeira coluna da matriz A. Para obter as outras duas colunas de A, vamos procurar dois vetores ortogonais a $\mathbf{u}$ que sejam ortogonais entre si e, depois, normalizá-los. O vetor $\mathbf{v} = (a,\ b,\ c)$ será ortogonal a $\mathbf{u}$ se e somente se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$, isto é, quando

$$a + 2b + 2c = 0.$$

Podemos escolher $(a,\ b,\ c) = (0,\ 1,\ -1)$. O terceiro vetor $\mathbf{w} = (x,\ y,\ z)$ agora tem que satisfazer $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$ e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$, ou seja, tem que satisfazer o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 0 \\ y - z = 0\,, \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} x = -4y \\ z = y\,. \end{cases}$$

Assim, obtemos

$$(x,\ y,\ z) = (-4y,\ y,\ y) = (-4,\ 1,\ 1)y,\ y \in \mathbb{R}.$$

Podemos escolher $y = 1$, obtendo $(x,\ y,\ z) = (-4,\ 1,\ 1)$. Normalizando os vetores $(0,\ 1,\ -1)$ e $(-4,\ 1,\ 1)$, obtemos $\left(0,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\left(\dfrac{-4}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{3\sqrt{2}}\right)$, respectivamente. Portanto, uma matriz ortogonal A desejada é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & -4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

4. a. As colunas da matriz A podem ser representadas pelos ve-

tores

$$\mathbf{u}_1 = (1,1,-1),\ \mathbf{u}_2 = (1,3,4) \text{ e } \mathbf{u}_3 = (7,-5,2).$$

Temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle &= 1+3-4 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle &= 7-5-2 = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2\, , \mathbf{u}_3 \rangle &= 7-15+8 = 0. \end{aligned}$$

Assim, as colunas de A formam um conjunto de vetores ortogonais.

b. Calculando o produto interno entre a primeira e segunda linhas obtemos

$$\langle (1,1,7),(1,3,-5) \rangle = 1+3-35 \neq 0,$$

e, portanto, as linhas de A não formam vetores ortogonais.

c. As colunas de A formam vetores ortogonais mas não são vetores unitários, pois

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{3} \neq 1.$$

Como as colunas de A não formam vetores ortonormais então A não é matriz ortogonal.

5. As colunas da matriz A são representadas pelos vetores $u = (1/3, y)$ e $\mathbf{v} = (x,z)$. Da condição de $\mathbf{u}$ ter que ser vetor unitário, temos que

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \frac{1}{9} + y^2 = 1,$$

o que nos dá $y^2 = \frac{8}{9}$, ou $y = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$. Assim, a primeira coluna da matriz A pode ser representada por

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) \text{ ou } \mathbf{u} = \left(\frac{1}{3}, \frac{-2\sqrt{2}}{3} \right).$$

Sendo $\mathbf{v} = (x,z)$ vetor ortogonal a $\mathbf{u}$ e unitário, temos as quatro possibilidades para a matriz A:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{-1}{3} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{-2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

✍ Lembre que na Aula 9 vimos que todos os vetores unitários ortogonais ao vetor unitário (a,b) são $(-b,a)$ ou $(b,-a)$.

6. As primeiras duas colunas da matriz A serão os vetores $(1,1,1)$ e $(0,-1,1)$ normalizados, que denotaremos, respectivamente, por $\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\mathbf{v} = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Para que a matriz A seja ortogonal, a terceira coluna deverá ser representada por um vetor unitário $\mathbf{w}$ ortogonal a $\mathbf{u}$ e a $\mathbf{v}$, por exemplo,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}\right).$$

Assim, uma das possibilidades é

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Há 8 matrizes, pois a primeira coluna pode ser **u** ou **-u**; a segunda coluna, **v** ou **-v** e a terceira coluna, **w** ou **-w**.

7. Como foi visto na Aula 11,

$$A_1 = A_{\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$A_2 = A_{5\pi/6} = \begin{pmatrix} \cos\frac{5\pi}{6} & -\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} \\ \operatorname{sen}\frac{5\pi}{6} & \cos\frac{5\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Por outro lado, a reta $y = x$ forma uma ângulo de $\pi/4$ com o eixo-x. Assim, usando a notação da aula 14 para reflexões, temos $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ e, portanto, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo,

$$B_1 = B_{\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos\pi/2 & \operatorname{sen}\pi/2 \\ \operatorname{sen}\pi/2 & -\cos\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Analogamente, a reta $y = -x$ forma uma ângulo de $3\pi/4$ com o eixo-x. Assim, temos $\frac{\theta}{2} = \frac{3\pi}{4}$ e, portanto, $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Logo,

$$B_2 = B_{3\pi/2} = \begin{pmatrix} \cos 3\pi/2 & \operatorname{sen} 3\pi/2 \\ \operatorname{sen} 3\pi/2 & -\cos 3\pi/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, pelas propriedades de composição vistas na aula 14, vale que

$$A_1^2 = A_{\pi/6} \cdot A_{\pi/6} = A_{2\pi/6} = A_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_1^3 = A_{\pi/6} \cdot A_{\pi/6} \cdot A_{\pi/6} = A_{3\pi/6} = A_{\pi/2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_1^2 = B_{\pi/2} \cdot B_{\pi/2} = A_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A_1 \cdot B_1 = A_{\pi/6} \cdot B_{\pi/2} = B_{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}} = B_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_2 \cdot B_2 = A_{5\pi/6} \cdot B_{3\pi/2} = B_{\frac{5\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}} = B_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$B_1 \cdot A_1 = B_{\pi/2} \cdot A_{\pi/6} = B_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}} = B_{\pi/3} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

$$A_1^{-1} = A_{\pi/6}^{-1} = A_{-\pi/6} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix};$$

$B_2^{-1} = B_2$, pois $B_2^2 = I_2$.

8. a. Como A é matriz ortogonal, temos que $A^{-1} = A^t$. Assim,

$$(A^{-1})^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t,$$

logo, A^{-1} é matriz ortogonal. Analogamente,

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = (A^t)^t,$$

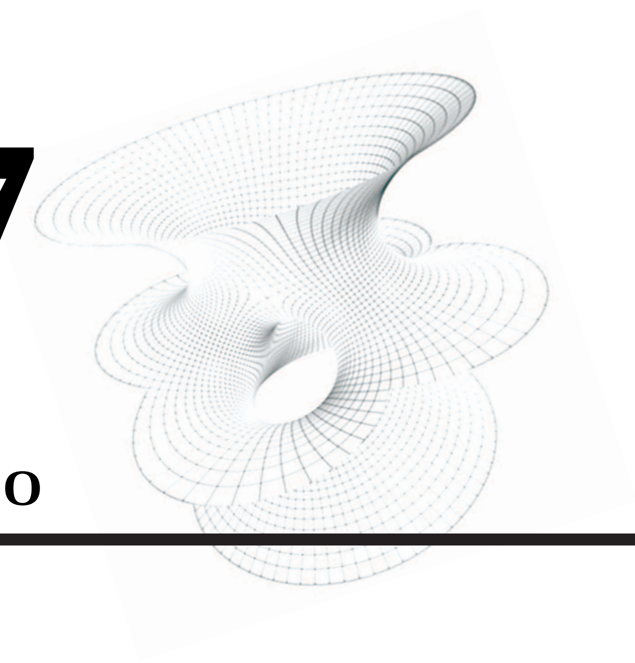
e, portanto, A^t também é matriz ortogonal.

b. Como B é matriz ortogonal, vale que $B^{-1} = B^t$. Assim,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t,$$

logo, AB é matriz ortogonal.

Aula 17



Rotações no Espaço

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o efeito das rotações no espaço em torno dos eixos cartesianos;
2. verificar que essas rotações são exemplos de matrizes ortogonais.

ROTAÇÕES NO ESPAÇO

Pré-requisitos:
Aulas 08, 09, 10,
11, 13 e 14.

Nesta aula, vamos estudar algumas transformações ortogonais em $\mathbb{R}^3$. Mais precisamente, faremos um estudo de matrizes ortogonais de ordem 3. Começaremos estudando as rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$, porém, nos limitaremos às rotações em torno dos eixos cartesianos. Inicialmente, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 17.1.

Uma rotação de θ radianos em torno do eixo-z.

Solução:

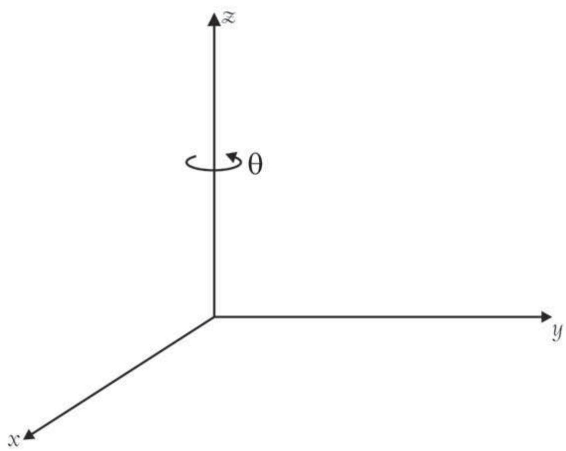


Figura 17.1: Sentido positivo da rotação em torno do eixo-z.

Convencionamos que o sentido positivo da rotação é o indicado pela **Figura 17.1**. Denotaremos por $\mathbf{v} = (x, y, z)$ um vetor de $\mathbb{R}^3$ e por $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ o resultado da aplicação em $\mathbf{v}$ de uma rotação de θ radianos em torno do eixo-z. Veja a **Figura 17.2**.

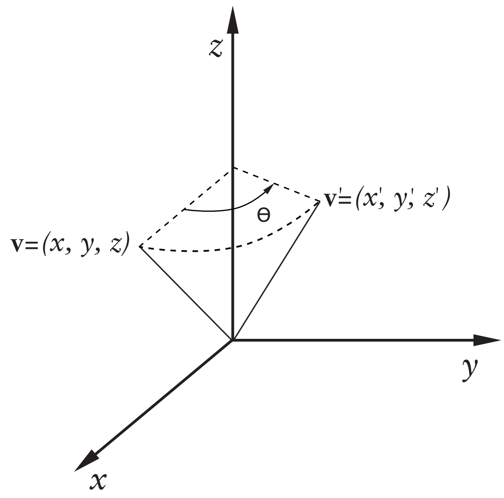


Figura 17.2: Rotação de θ radianos em torno do eixo-z.

Observe que a terceira coordenada de $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ deve ser igual à terceira coordenada de $\mathbf{v}$, ou seja, $z' = z$.

Nosso objetivo, agora, é calcular as coordenadas x' e y' de $\mathbf{v}'$ em função das coordenadas x, y e z de $\mathbf{v}$ e do ângulo θ. Para isso, observe que o vetor $(x', y', 0)$ é o resultado de aplicarmos uma rotação de θ radianos ao vetor $(x, y, 0)$. Como estes dois vetores pertencem ao plano-xy então, pelo visto na Aula 11, sabemos que

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y \operatorname{sen}\theta \\ y' = y\cos\theta + x\cos\theta \end{cases},$$

pois quando trabalhamos no plano a matriz rotação de θ radianos é dada por

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Assim, usando notação matricial e o fato de que $z' = z$, temos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Portanto, a matriz de ordem 3 que representa uma rotação de θ radianos em torno do eixo-z é dada por:

$$A_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observe que o bloco superior da matriz, $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, é uma matriz de rotação no plano-xy. É fácil identificarmos algumas propriedades da matriz $A_z(\theta)$:

1. $A_z(\theta)$ é uma matriz ortogonal.

   De fato, as colunas formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

2. $\det A_z(\theta) = 1$

3. O polinômio característico de $A_z(\theta)$ é dado por:

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - A_z(\theta)) = \\ &= \begin{vmatrix} x-\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0 \\ -\operatorname{sen}\theta & x-\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)(x^2 - 2\cos\theta\, x + 1) \end{aligned}$$

Já vimos que o polinômio $x^2 - 2\cos\theta\, x + 1$ possui raízes reais se e somente se $\theta = 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ (que representa o caso trivial $x = 1$). Assim, a única raiz real de $p(x)$ é $\lambda = 1$, ou seja, $\lambda = 1$ é o único autovalor real de $A_z(\theta)$. Nesse caso, um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é exatamente $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$, que corresponde à direção determinada pelo eixo-z, em torno da qual ocorre a rotação.

Exemplo 17.2.

Uma rotação de θ radianos em torno do eixo-y.

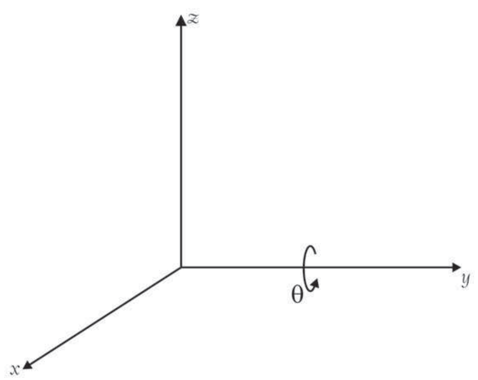


Figura 17.3: Sentido positivo da rotação em torno do eixo-y.

Solução:

O sentido positivo da rotação é indicado na **Figura 17.3**. Procedendo de forma análoga ao que foi feito no Exemplo 17.1, obtemos que a matriz que representa uma rotação de θ radianos em torno do eixo-y é dada por:

$$A_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Observe que $A_y(\theta)$ é uma matriz ortogonal com determinante igual a 1. O polinômio característico de $A_y(\theta)$ é dado por:

$$p(x) = (x-1)(x^2 - 2\cos\theta\, x + 1),$$

e, assim, a matriz $A_y(\theta)$ possui também um único autovalor real, $\lambda = 1$. Nesse caso, um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é exatamente $\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$, que corresponde à direção determinada pelo eixo-y, em torno da qual ocorre a rotação.

Os Exemplos 17.1 e 17.2 tornam bastante previsível o que acontece com a rotação em torno do eixo-x.

Exemplo 17.3.

A matriz

$$A_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

determina uma rotação de θ radianos em torno do eixo-x, sendo o sentido positivo da rotação dado pela **Figura 17.4**.

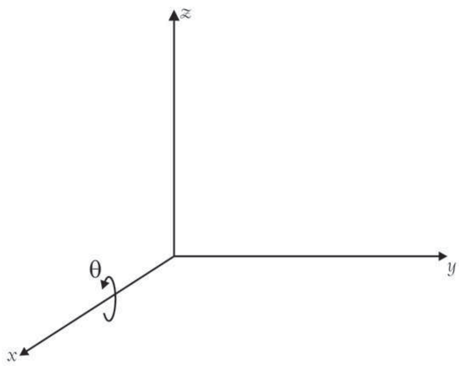


Figura 17.4: Sentido positivo da rotação em torno do eixo-x.

Vemos que $\det A_x(\theta) = 1$ e que o único autovalor real de $A_x(\theta)$ é $\lambda = 1$. Um autovetor associado ao autovalor $\lambda = 1$ é $\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$, que corresponde à direção determinada pelo eixo-x, em torno da qual ocorre a rotação. Observe que o bloco inferior da matriz $A_x(\theta)$ é exatamente uma matriz de rotação no plano-yz.

No próximo exemplo, trataremos brevemente das rotações que são realizadas em torno de um eixo passando pela origem de $\mathbb{R}^3$. Vamos verificar que, ao escolher uma base ortonormal adequadamente, a matriz que define essa rotação tem a mesma forma das matrizes dos exemplos anteriores. Para isto consideremos a seguinte definição:

Definição 17.1 (Rotação no sentido positivo)**.**

Seja L uma reta no espaço passando pela origem O e gerada pelo vetor $\mathbf{v}$. Seja π o plano pela origem perpendicular a L. Uma rotação em torno de L é dita *no sentido positivo* se, e somente se, um observador com os pés em O e os olhos na extremidade final de $\mathbf{v}$ vê os pontos do plano π serem girados em torno da origem O no sentido anti-horário (já considerado como sentido positivo das rotações no plano).

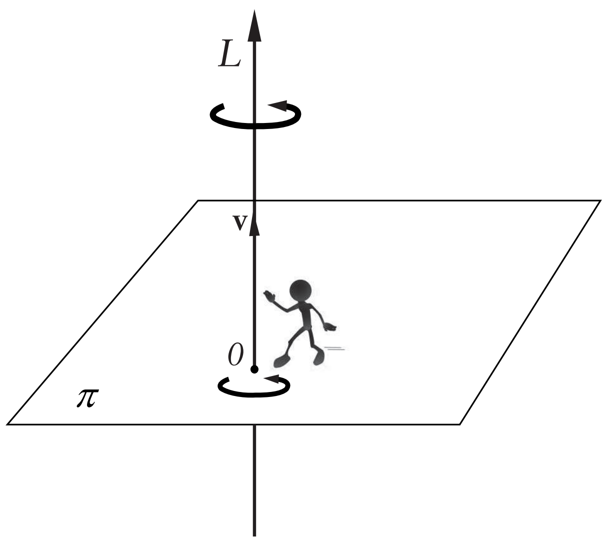


Figura 17.5: Sentido positivo da rotação em torno da reta L gerada pelo vetor v.

Podemos descrever o sentido positivo da rotação em torno da reta orientada por v usando o produto vetorial.

Para isto, tomamos uma base ortonormal $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ construída da seguinte maneira:

1. tomamos $\mathbf{u}_3 = \dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ com mesma direção e mesmo sentido de v;
2. escolhemos $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ vetores ortonormais no plano π;
3. $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3$.

Tendo estas três propriedades, usamos a regra da mão direita para determinar a direção e sentido de $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{u}_2$.

Observamos que o sentido da rotação em torno da origem para fazermos $\mathbf{u}_1$ coincidir com $\mathbf{u}_2$ é o mesmo sentido indicado na figura e chamado o sentido positivo da rotações.

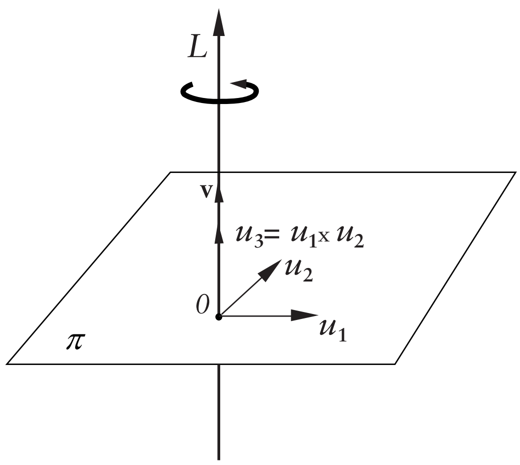


Figura 17.6: Sentido positivo da rotação em torno da reta L gerada pelo vetor v.

O sistema de coordenadas $Oxyz$ que trabalhamos foi construído usando a base ortonormal $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ num ponto O, que foi identificado com a origem do sistema de coordenadas, onde $\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$.

Assim, o eixo x é gerado por $\vec{i} = e_1$, o eixo y é gerado por $\vec{j} = e_2$ e o eixo z é gerado por $\vec{k} = e_3$.

O sentido da rotação no plano xy em torno da origem é o sentido anti-horário, convencionado como o sentido positivo das rotações no plano. Essa situação é a motivação para a definição acima do caso geral.

Verifiquem como a regra da mão direita funciona nas rotações em torno dos eixos coordenados.

No Exemplo 17.1 (rotação no sentido positivo em torno do eixo z):

1. eixo z gerado (orientado) por $\vec{k}$;
2. plano perpendicular ao eixo z é o plano xy e uma base ortonormal do plano xy é $\{\vec{i},\vec{j}\}$;
3. $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$.

No Exemplo 17.2 (rotação no sentido positivo em torno do eixo y):

1. eixo y gerado (orientado) por $\vec{j}$;
2. plano perpendicular ao eixo y é o plano xz e uma base ortonormal do plano xz é $\{\vec{k},\vec{i}\}$;
3. $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$.

No Exemplo 17.3 (rotação no sentido positivo em torno do eixo x):

1. eixo x gerado (orientado) por $\vec{i}$;
2. plano perpendicular ao eixo x é o plano yz e uma base ortonormal do plano yz é $\{\vec{j},\vec{k}\}$;
3. $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$.

Exemplo 17.4.

Vamos determinar a matriz $A \in M_3(\mathbb{R})$ que define a rotação de θ radianos em torno da reta L paralela ao vetor $\mathbf{v}=(1,1,1)$ e que passa pela origem.

Solução:

Como foi mencionado anteriormente, precisamos escolher uma base ortonormal adequada para que a matriz, nesta base, tenha a mesma forma que as matrizes dos exemplos anteriores. Por isso, é muito importante que você tenha compreendido bem como as matrizes desses exemplos foram construídas. Com isso em mente, procedemos à construção de uma base ortonormal conforme estudado na Aula 10.

Denotaremos por $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$ o vetor que determina a reta em torno da qual faremos a rotação de θ radianos. O sentido positivo dessa rotação é dado pela **Figura 17.7**.

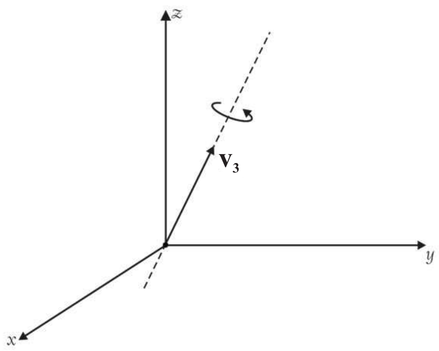


Figura 17.7: Sentido positivo da rotação em torno do vetor $\mathbf{v}_3 = (1,1,1)$.

A ideia, primeiramente, é construir uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo este vetor. Claramente, os outros dois vetores desta base, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, pertencem ao plano π que passa pela origem e cujo vetor normal é $\mathbf{v}_3$. Veja a Figura **17.8**.

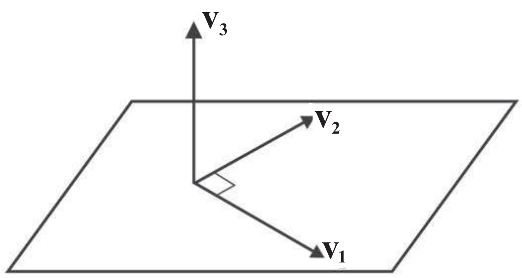


Figura 17.8: O plano π com vetor normal $\mathbf{v}_3$ e a base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

Do curso de Geometria Analítica, sabemos que o plano π é descrito pela equação

$$x + y + z = 0.$$

O vetor $\mathbf{v}_1$ pode ser qualquer vetor que pertença a esse plano, por exemplo,

$$\mathbf{v}_1 = (-1,-1,2).$$

Consequentemente, o vetor $\mathbf{v}_2 = (x,y,z)$, além de pertencer ao plano π, deve ser ortogonal a $\mathbf{v}_1$. Assim, devemos ter

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ \langle \mathbf{v}_1,\, \mathbf{v}_2 \rangle = 0\,, \end{cases}$$

ou,

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x-y+2z=0\,. \end{cases}$$

Escalonando o sistema linear acima, obtemos que suas soluções são da forma:

$$\begin{cases} x=-y \\ z=0\,,\ \ y\in\mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Temos, então, que o vetor $\mathbf{v}_2$ pode ser obtido tomando $y=-1$:

$$\mathbf{v}_2 = (1,-1,0).$$

Portanto, o conjunto $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Verificamos que $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_3$. Logo, a base ortogonal $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3\}$ está orientada positivamente, conforme mostra a **Figura 17.8**. Normalizando esta base, obtemos os vetores

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{||\mathbf{v}_1||} = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right); \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_2||} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right); \\ \mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{||\mathbf{v}_3||} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{v}_3$, temos que $\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3$. Assim, $\beta=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, orientada positivamente. Dado um vetor arbitrário $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^3$, seja $[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ suas componentes na base β. Denotando por A_β a matriz que representa essa rotação na base β, devemos ter

$$A_\beta[\mathbf{v}]_\beta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

pois a rotação é realizada em torno do eixo determinado por $\mathbf{u}_3$, isto é,

$$A_\beta[\mathbf{u_3}]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

equivalentemente, a rotação de $\mathbf{u}_3$ é $0\cdot\mathbf{u}_1+0\cdot\mathbf{u}_2+1\cdot\mathbf{u}_3=\mathbf{u}_3$.

É importante salientar a analogia com o Exemplo 17.1. Neste contexto, o vetor $\mathbf{u}_3$ faz o papel do vetor $\mathbf{e}_3=(0,0,1)$, que determina o eixo-z e o plano π, gerado pelos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$, faz o papel do plano-xy. Observe que A_β, quando $\theta\neq 0$ e $\theta\neq\pi$, possui um único autovalor real, $\lambda=1$, com autovetor associado $\mathbf{u}_3$, que corresponde à direção do eixo de rotação.

Como a matriz de mudança de base, da base β para a base canônica, é $P=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ e $P^{-1}=P^t$, então dado θ determinamos a matriz A da rotação na base canônica fazendo o produto a seguir

$$A=PA_\beta P^t$$

$$=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Na resolução dos exercícios sobre rotação (no sentido positivo) no espaço em torno de uma reta L gerada por $\mathbf{v}$ devemos construir uma base ortonormal $\beta=\{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ tal que:

1. $\mathbf{u}_3=\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$;
2. $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ estão no plano pela origem perpendicular à reta L;
3. $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ têm que ser escolhidos de modo que $\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_2=\mathbf{u}_3$.

Exercício 17.1.

1. Sejam $A_x(\theta_1)$ e $A_x(\theta_2)$ duas matrizes de rotação em torno do eixo-x. Calcule o produto $A_x(\theta_1)\cdot A_x(\theta_2)$ e mostre que esse produto representa uma rotação de $\theta_1+\theta_2$ radianos em torno do eixo-x. Conclua que o produto de matrizes de rotação em torno de um mesmo eixo comuta.

2. Considere as rotações $A_x(\pi/2)$ e $A_z(\pi/2)$ de $\pi/2$ radianos em torno dos eixos x e z, respectivamente. Calcule os produtos $A_x(\pi/2)\cdot A_z(\pi/2)$ e $A_z(\pi/2)\cdot A_x(\pi/2)$ e conclua que rotações em torno de eixos diferentes não comutam.

Aula 18

REFLEXÕES NO ESPAÇO

Objetivos

Ao final desta aula, você deverá ser capaz de:

1. compreender o efeito das reflexões no espaço com respeito aos planos cartesianos;
2. verificar que estas reflexões são exemplos de matrizes ortogonais.

REFLEXÕES NO ESPAÇO

Pré-requisitos:
Aulas 08, 09, 10, 12, 13 e 14.

Nesta aula, continuaremos nosso estudo de matrizes ortogonais de ordem 3. Agora, estudaremos reflexões no espaço. No entanto, nos limitaremos às reflexões com respeito aos planos cartesianos do $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 18.1.

A reflexão com respeito ao plano-xy (ou seja, o plano de equação cartesiana $z = 0$).

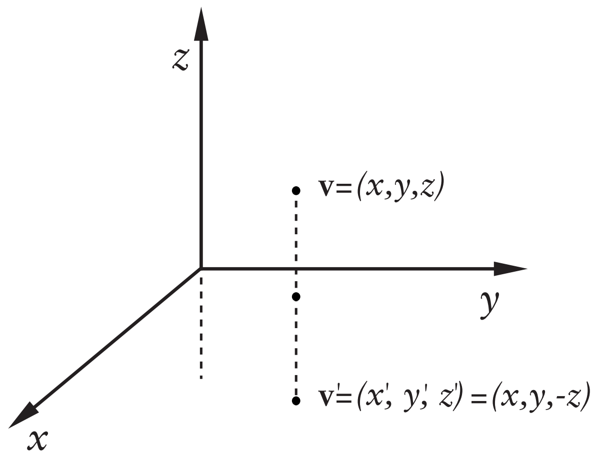


Figura 18.1: Reflexão no plano xy.

Solução:

Seja $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ o vetor obtido quando refletimos o vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ no plano-xy. [Veja a **Figura 18.1**.] Observe que os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ pertencem à mesma reta e que

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = -z\,. \end{cases}$$

Assim, usando a notação matricial, temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que representa a reflexão no plano-xy. Facilmente obtemos algumas propriedades interessantes da matriz B. Por exemplo,

1. B é uma matriz ortogonal. De fato, observe que suas colunas formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$;

2. $\det(B) = -1$;

3. O polinômio característico de B é dado por

$$p(x) = (x-1)^2(x+1).$$

Basta observar que

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - B) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x+1)\,. \end{aligned}$$

4. A matriz B possui dois autovalores reais,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1, &\ \text{com multiplicidade 2; e} \\ \lambda_2 = -1, &\ \text{com multiplicidade 1.} \end{aligned}$$

Vamos calcular os respectivos auto-espaços, a saber,

$$E(1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = \mathbf{w}\} \text{ e } E(-1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = -\mathbf{w}\}.$$

Para obter o auto-espaço $E(1)$, precisamos resolver o sistema linear homogêneo

$$(B - I)\,\mathbf{w} = 0,$$

onde $\mathbf{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Mas este sistema é equivalente ao sistema linear

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que a solução deste último sistema é dada por

$$z = 0 \text{ e } x,\ y \in \mathbb{R},$$

o que nos dá exatamente o plano-xy, como era de se esperar. Temos, então,

$$E(1) = \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,|x,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

Como uma escolha de base ortonormal desse auto-espaço será importante mais à frente, podemos escolher facilmente os vetores

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0) \text{ e } \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$$

para base de $E(1)$.

Por outro lado, para calcularmos efetivamente o auto-espaço $E(-1)$, associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$, temos que resolver o sistema linear

$$(B+I)\,\mathbf{w} = 0,$$

com $\mathbf{w} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, que é equivalente ao sistema escalonado

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cuja solução geral é dada por

$$x = 0, y = 0 \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

Obtemos, assim, que

$$E(-1) = \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3 \,|z \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $E(-1)$ é representado pelo eixo-z e, como base desse auto-espaço, podemos escolher o vetor $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$.

Vale destacar que $E(1)$ é o complemento ortogonal de $E(-1)$, como já foi estudado no curso de Álgebra Linear I.

Exemplo 18.2.

A reflexão com respeito ao plano-xz (ou seja, o plano de equação cartesiana $y = 0$).

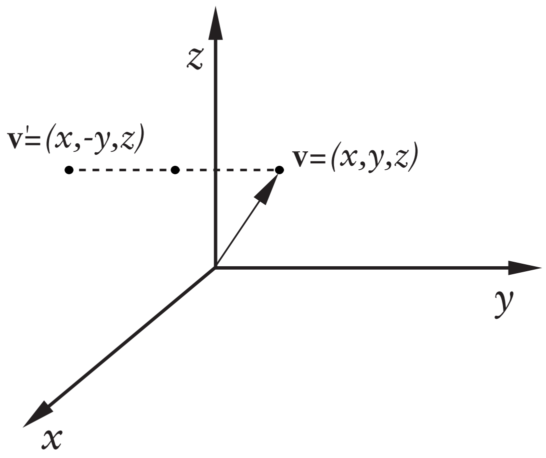


Figura 18.2: Reflexão no plano xz.

Solução:

Seguindo a mesma estratégia do Exemplo 18.1, seja $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ o vetor obtido quando refletimos o vetor $\mathbf{v} = (x, y, z)$ no plano-xz. [Veja a **Figura18.2**.] Portanto,

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \\ z' = z\,. \end{cases}$$

Assim, usando a notação matricial, temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que representa a reflexão no plano-xz, com respeito à base canônica.

Como no Exemplo 18.1, temos que a matriz B é ortogonal com determinante igual a -1 e seu polinômio característico é dado por

$$\begin{aligned} p(x) &= \det(xI_3 - B) \\ &= \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ &= (x-1)^2(x+1)\,. \end{aligned}$$

Assim, seus dois autovalores são

$$\lambda_1 = 1, \text{ com multiplicidade 2; e}$$
$$\lambda_2 = -1, \text{ com multiplicidade 1.}$$

Sem dificuldades, como no Exemplo 18.1, concluímos que os auto-espaços associados

$$E(1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = \mathbf{w}\} \text{ e } E(-1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = -\mathbf{w}\}$$

são, respectivamente, o plano-*xz* e o eixo-*y*. É fácil ver que $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$ é uma base ortonormal de $E(1)$ e $\{\mathbf{e}_2\}$ é uma base ortonormal de $E(-1)$.

Observe, novamente, que o subespaço $E(1)$ é o complemento ortogonal do subespaço $E(-1)$.

Exemplo 18.3.

A reflexão com respeito ao plano-*yz* (ou seja, o plano de equação cartesiana $x = 0$).

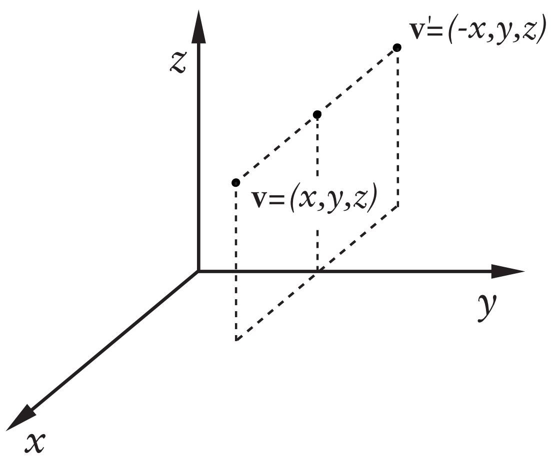


Figura 18.3: Reflexão com respeito ao plano-*yz*.

Solução:

Seguindo a mesma estratégia dos Exemplos 18.1 e 18.2, seja $\mathbf{v}' = (x', y', z')$ o vetor obtido quando refletimos o vetor $\mathbf{v} = (x,y,z)$ no plano-*yz*. [Veja a **Figura 18.3**.] Temos então

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \\ z' = z\,. \end{cases}$$

Assim, usando a notação matricial, temos que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

e, portanto,

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é a matriz que representa a reflexão no plano-yz, com respeito à base canônica.

Observe que as matrizes dos Exemplos 18.1, 18.2 e 18.3, que definem as reflexões nos planos xy, xz e yz, respectivamente, são bem parecidas: sua diagonal principal é formada por 1 e -1 e deve-se destacar a posição do valor -1.

Como nos Exemplos 18.1 e 18.2, temos que a matriz B é ortogonal com determinante igual a -1 e seu polinômio característico é dado por

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & \det(xI_3 - B) \\ & = & \begin{vmatrix} x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} \\ & = & (x-1)^2(x+1)\,. \end{array}$$

Assim, seus dois autovalores são

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = 1, \text{ com multiplicidade 2; e} \\ \lambda_2 = -1, \text{ com multiplicidade 1.} \end{array}$$

Sem dificuldades, como nos exemplos anteriores, concluímos que os auto-espaços associados

$$E(1) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = \mathbf{w}\} \text{ e } E(-1) = \{w \in \mathbb{R}^3 \,|B\mathbf{w} = -\mathbf{w}\}$$

são, respectivamente, o plano-yz e o eixo-x. Assim, $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma base ortonormal de $E(1)$ e $\{\mathbf{e}_1\}$ é uma base ortonormal de $E(-1)$.

Nos exemplos anteriores, exibimos as matrizes que definem as reflexões nos chamados planos coordenados, ou seja, nos planos xy, xz e yz, cujas equações são $z = 0$, $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente. No próximo exemplo, veremos uma reflexão num plano diferente pela origem.

Exemplo 18.4.

A reflexão com respeito ao plano $\pi : 2x+3y-z=0$.

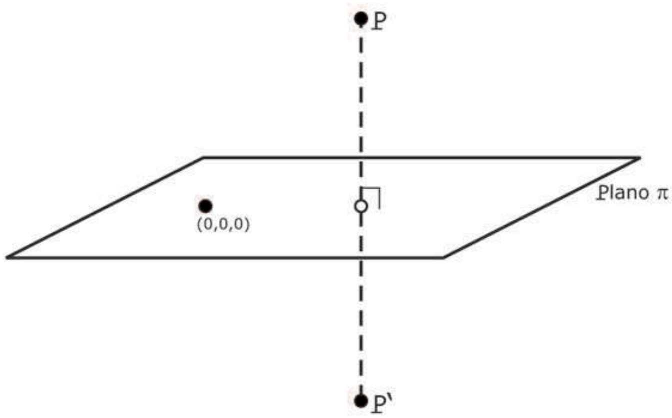


Figura 18.4: Reflexão com respeito ao plano π.

Solução:

Pela **Figura 18.4**, o ponto P' é a imagem do ponto P sob a reflexão no plano π. Observamos que escolhendo adequadamente uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, a matriz que representa essa reflexão é análoga à dos exemplos anteriores. Assim, com a experiência acumulada nos Exemplos 18.1, 18.2 e 18.3, vamos construir esta base ortonormal.

Sabemos, do estudo de Geometria Analítica, que $\mathbf{v}_3 = (2,3,-1)$ é um vetor normal ao plano π. Vamos construir uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ contendo esse vetor $\mathbf{v}_3$. É claro que os outros dois vetores dessa base, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, devem pertencer ao plano π e devem ser ortogonais entre si. Assim, seja $\mathbf{v}_1$ um vetor qualquer pertencente ao plano π, por exemplo, $\mathbf{v}_1 = (-1,1,1)$. Agora, o vetor $\mathbf{v}_2 = (x,y,z)$ deve pertencer ao plano π e deve ser ortogonal a $\mathbf{v}_1$. Assim, suas componentes, x, y e z, devem satisfazer

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ -x+y+z=0\,. \end{cases}$$

Escalonando esse sistema, vemos que a solução é

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{5}\,z \\ y = -\dfrac{1}{5}\,z,\; z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Podemos escolher $z = 5$ para obter $\mathbf{v}_2 = (4, -1, 5)$. Assim, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Normalizando essa base, obtemos os vetores

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \text{ pertencente ao plano } \pi,\\
\mathbf{u}_2 &= \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right) \text{ pertencente ao plano } \pi,\\
\mathbf{u}_3 &= \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right) \text{ vetor normal ao plano } \pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Assim, a matriz A que representa na, base canônica, a reflexão no plano π deve satisfazer (veja a **Figura 18.5**).

$$\begin{aligned}
&A\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1 = 1\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + 0\cdot\mathbf{u}_3, \text{ pois } \mathbf{u}_1 \text{ pertence ao plano } \pi,\\
&A\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 1\cdot\mathbf{u}_2 + 0\cdot\mathbf{u}_3, \text{ pois } \mathbf{u}_2 \text{ pertence ao plano } \pi,\\
&A\mathbf{u}_3 = -\mathbf{u}_3 = 0\cdot\mathbf{u}_1 + 0\cdot\mathbf{u}_2 + (-1)\cdot\mathbf{u}_3, \text{ pois } \mathbf{u}_3 \text{ é um vetor normal}\\
&\text{ao plano } \pi.
\end{aligned}$$

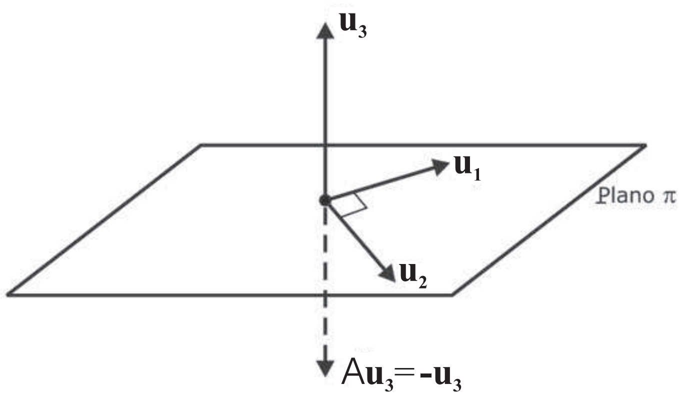


Figura 18.5: A base ortonormal $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ e o plano π.

Logo, a matriz A_β, que representa a reflexão na base β, é dada por $A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, que é a mesma matriz do Exemplo 18.1. Observamos que a posição do elemento -1 na diagonal principal de A_β depende da ordem dos elementos de $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

Exercício 18.1.

1. Determine a matriz A da reflexão no plano $\pi : 2x + 3y - z = 0$, do Exemplo 18.4, com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

2. Determine os autovalores e auto-espaços associados à matriz obtida no Exercício 1.

AULA 1

Exercício 1.1

1. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ tem autovalor $\lambda = 0$ e $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ tem autovalor $\lambda = 1$.
2. Não é autovetor.
3. Sim, $\lambda = 0$.
4. $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.
5. Uma base para o auto-espaço é $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

AULA 2

Exercício 2.1

1. $\lambda = 1 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; \quad \lambda = 5 : \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
2. $\lambda = 1 : \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.
3. $A^2 : 1$ e 4; $A^3 : -1, 1$ e 8.
4. Use que $A^t - \lambda I = (A - \lambda I)^t$ e calcule o determinante.
5. Use que $A^2 - \lambda^2 I = (A - \lambda I)(A + \lambda I)$ e calcule o determinante.

AULA 3

Exercício 3.1

1. $\lambda_1 = -1 : \mathbf{v}_1 = (0,1),\ \lambda_2 = 3 : \mathbf{v}_2 = (1,2).$

2. $\lambda_1 = -1 : \mathbf{v}_1 = (1,-2),\ \lambda_2 = 5 : \mathbf{v}_2 = (1,1).$

3. a. $\lambda_1 = 1 : \mathbf{v}_1 = (0,1,0),\ \lambda_2 = 2 : \mathbf{v}_2 = (-1,2,2),\ \lambda_3 = 3 : \mathbf{v}_3 = (-1,1,1).$

4. a. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 : \mathbf{v}_1 = (1,1,0),\ \mathbf{v}_2 = (1,0,1),\ \lambda_3 = 2 : \mathbf{v}_3 = (-1,-1,1).$

   b. $\lambda_1 = 1$ tem multiplicidade algébrica e geométrica igual a 2 e $\lambda_3 = 2$ tem multiplicidade algébrica e geométrica igual a 1.

5. $a = b = c = d = e = f = 1$, $\mathbf{v}_1 = (1,1,1) : \lambda_1 = 3$, $\mathbf{v}_2 = (1,0,-1) : \lambda_2 = 0$, $\mathbf{v}_3 = (1,-1,0) : \lambda_3 = 0$.

AULA 4

Exercício 4.1

1. a. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1 : \mathbf{v}_1 = (1,0)$

   b. $\lambda_1 = 1$ apresenta multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1.

2. a. $\lambda_1 = \lambda_2 = 6 : \mathbf{v}_1 = (1,1)$

   b. $\lambda_1 = 6$ apresenta multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 1.

3. a. $\lambda_1 = 1 : \mathbf{v}_1 = (3,-1,3)\quad \lambda_2 = \lambda_3 = 2 : \mathbf{v}_2 = (2,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (2,0,1)$.

   b. $\lambda_1 = 1$ apresenta multiplicidade algébrica 1 e multiplicidade geométrica 1; $\lambda_2 = 2$ apresenta multiplicidade algébrica 2 e multiplicidade geométrica 2.

4. a. $\lambda = 1 : \mathbf{v}_1 = (0,0,1)$

   b. $\lambda = 1$ apresenta multiplicidade algébrica 3 e multiplicidade geométrica 1.

5. $\det(xI - A) = \det((xI - A)^t) = \det(xI^t - A^t) = \det(xI - A^t)$

AULA 5

Exercício 5.1

1. a. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. a. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

3. a. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$

AULA 6

Exercício 6.1

1. a. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2. a. $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

   b. $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

3. Não é diagonalizável.

AULA 8

Exercício 8.1

1. O operador T não é diagonalizável, pois T só possui o autovalor $\lambda = 2$ e o auto-espaço correspondente $E(2)$ tem dimensão 1, uma base sendo formada por $\mathbf{v}_1 = (1,1)$.

2. O operador T é diagonalizável,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

uma base de autovetores é formada por $\mathbf{v}_1 = (1,0,1)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0)$ e $\mathbf{v}_3 = (1,0,-1)$.

3. O operador T é diagonalizável,

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

uma base de autovetores é formada por $\mathbf{v}_1 = (1,0,0,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,0,0), \mathbf{v}_3 = (0,0,0,1)$ e $\mathbf{v}_4 = (4,-5,4,0)$.

4. Temos que 0 é autovalor de T se e somente se existe vetor não-nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tal que $T(\mathbf{v}) = 0\mathbf{v} = 0$. Assim, o núcleo de T é não-nulo, isto é, $N(T) \neq \{0\}$. Logo, T não é inversível.

AULA 9

Exercício 9.1

1. $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ ou $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$

2. $k = 4/3$

3. Por exemplo, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$; $\mathbf{u}_2 = (1,0,0,0)$; $\mathbf{u}_3 = (0,2,1,0)$ e $\mathbf{u}_4 = (0,1,-2,-1)$. No entanto, existem muitas outras possibilidades.

4. Base ortonormal:

   $\hat{\mathbf{u}}_1 = (1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3},\ 1/\sqrt{3})$;

   $\hat{\mathbf{u}}_2 = (1/\sqrt{14},\ 2/\sqrt{14},\ -3/\sqrt{14})$ e

   $\hat{\mathbf{u}}_3 = (5/\sqrt{42},\ -4/\sqrt{42},\ -1/\sqrt{42})$.

5. Por exemplo: $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

AULA 10

Exercício 10.1

1. a. Observe que as colunas de A e B formam bases ortonormais de $\mathbb{R}^3$.

   b. $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Seu polinômio característico é $p(x) = (x-1)(x^2+1)$; logo, seu único autovalor real é $\lambda = 1$.

AULA 11

Exercício 11.1

1. Considerando as matrizes

$$A = A_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$D = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_5 & \mathbf{v}_6 & \mathbf{v}_7 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

temos que a imagem dos vértices da figura é dada pelas colunas da matriz

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & \frac{7\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & \frac{5\sqrt{2}}{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

2. $A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi} = A_{\varphi+\theta} = A_\varphi A_\theta$.
   O ângulo resultante é $\theta + \varphi$.

AULA 12

Exercício 12.1

1. Pela observação final, temos que

$$\begin{aligned} E &= P \cdot F^{-1} \cdot P^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{-3}{\sqrt{13}} \\ \frac{3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{13}} & \frac{3}{\sqrt{13}} \\ \frac{-3}{\sqrt{13}} & \frac{-2}{\sqrt{13}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pois, $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\ \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ é um vetor unitário tangente à reta $L : 3x + 2y = 0$ e, $\mathbf{v}_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$ é um vetor unitário normal à reta $L : 3x + 2y = 0$.

2. Como no exercício anterior, escolhendo base ortonormal $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, onde $\mathbf{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\ \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$ é um vetor unitário tan-

gente à reta L:2x+y=0 e $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ é um vetor unitário normal à reta $L: 2x+y=0$.

Assim,

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Representando os vértices pela matriz

$$D = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

então suas imagens pela reflexão são dadas pela matriz

$$BD = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{5} & -\frac{16}{5} & -3 \\ -\frac{1}{5} & \frac{13}{5} & 1 \end{pmatrix}.$$

AULA 13

Exercício 13.1

1. Temos a igualdade

$$\begin{aligned} B_\varphi &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A_\varphi A, \end{aligned}$$

onde A_φ é a matriz rotação de φ radianos e A é a matriz reflexão no eixo-x.

AULA 14

Exercício 14.1

1. Como B é matriz ortogonal, vale que $B^{-1} = B^t$. Assim,

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^tA^t = (AB)^t,$$

logo, AB é matriz ortogonal.

2. Representando os vértices pela matriz

$$D = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\ \mathbf{v}_4\ \mathbf{v}_5\ \mathbf{v}_6] = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Representamos por

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a matriz que faz a reflexão na reta $y = -x$ e por

$$A_{\pi/4} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

a matriz rotação de $\pi/4$ radianos. Então

$$A_{\pi/4}B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

e

$$A_{\pi/4}BD = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{-7\sqrt{2}}{2} & -3\sqrt{2} & \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{-3\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

AULA 17

Exercício 17.1

1. Usando as fórmulas de adição de arcos, temos que

$$A_x(\theta_1)\cdot A_x(\theta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1 & -\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_2 & -\operatorname{sen}\theta_2 \\ 0 & \operatorname{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 & -\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 - \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 \\ 0 & \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + \cos\theta_2\operatorname{sen}\theta_1 & \cos\theta_1\cos\theta_2 - \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_1+\theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) \\ 0 & \operatorname{sen}(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

$$= A_x(\theta_1+\theta_2)$$

Consequentemente,

$$A_x(\theta_1)\cdot A_x(\theta_2) = A_x(\theta_1+\theta_2) = A_x(\theta_2+\theta_1) = A_x(\theta_2)\cdot A_x(\theta_1).$$

2. Temos que

$$A_x(\pi/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad A_z(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_x(\pi/2)\cdot A_z(\pi/2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A_y(\pi/2)\cdot A_x(\pi/2) &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$A_x(\pi/2)\cdot A_z(\pi/2) \neq A_z(\pi/2)\cdot A_x(\pi/2)$$

e, portanto, as matrizes não comutam.

AULA 18

Exercício 18.1

1. Dada

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} & 4/\sqrt{42} & 2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{42} & 3/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{3} & 5/\sqrt{42} & -1/\sqrt{14} \end{pmatrix},$$

temos

$$B = PAP^{-1} = PAP^t = \begin{pmatrix} 3/7 & -6/7 & 2/7 \\ -6/7 & -2/7 & 3/7 \\ 2/7 & 3/7 & 6/7 \end{pmatrix}.$$

2. Autovalores: 1, 1 e -1;

Auto-espaço $E(1)$: subespaço gerado por
$\mathbf{u}_1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ e $\mathbf{u}_2 = \left(\frac{4}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}}, \frac{5}{\sqrt{42}}\right)$;
Auto-espaço $E(-1)$: subespaço gerado por
$\mathbf{u}_3 = \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right)$.