Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

$3^{\underline{a}}$ Avaliação Presencial de Números Complexos – 2009-2

Questão 1: 2,0 pts Mostre que em um triângulo qualquer, a bissetriz de um ângulo determina no lado oposto dois segmentos, menores respectivamente que o lado que lhe é adjacente

Solução: Seja ABC um triângulo, $\overline{AM}$ a bissetriz ao ângulo $\hat{A} = \alpha$. Seja $\theta = A\hat{M}B$ e $\gamma = A\hat{M}C$. Sabemos que qualquer ângulo externo de um triângulo é igual a soma dos outros dois que não lhe são adjacentes. Assim,

$\frac{\alpha}{2} + \hat{B} = \gamma$ e
$\frac{\alpha}{2} + \hat{C} = \theta$.

Concluímos, portanto, que $\frac{\alpha}{2} < \gamma$ e $\frac{\alpha}{2} < \theta$.

Assim os lados opostos aos respectivos ângulos guardam a mesma propriedade, isto é, $m(BM) < m(AB)$ e $m(MC) < m(AC)$.

Questão 2: (2,0 pts) Um ângulo de 55° é formado por duas tangentes a uma circunferência. Determine a medida do menor arco compreendido entre as duas tangentes.

Solução: Traçando os raios determinados pelos pontos de tangências e o centro da circunferência, obtemos ao prolongar um desses raios até encontrar a outra tangente, obtemos um triângulo cujos ângulos internos medem 90°, 35° e 55°. Assim, o maior ângulo formado pelos dois raios mede 125°. Donde segue que o menor arco de circunferência compreendido entre as duas tangentes mede 125°.

Questão 3: (2,0 pts) Encontre o complexo z pertencente ao quarto quadrante plano de Argand-Gauss tal que $z^3 = -27i$

Solução: Considerando $w = -27i$ temos $|w| = 27$ e
$arg(w) = -\dfrac{\pi}{2}$. Assim, a forma polar de w é dada por

$$w = 27(\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(-\tfrac{\pi}{2})).$$

Como a equação é cúbica, utilizando a segunda fórmula de Moivre,

podemos encontrar 3 soluções que são:

$z_1 = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(-\dfrac{\pi}{6}))$;

$z_2 = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3})) = 3(\cos(\dfrac{\pi}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{\pi}{2}))$

e

$z_3 = 3(\cos(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3}) + i\,\mathrm{sen}(-\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{4\pi}{3})) = 3(\cos(\dfrac{7\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(\dfrac{7\pi}{6}))$.

A solução que se encontra no quarto quadrante é a solução
$z_1 = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})$.

Questão 4: (2,0 pts) Encontre os valores de $x \in [\pi, 3\pi]$ que satisfazem a equação $\operatorname{sen} 2x = \cos x$.

Solução: Como $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$, então $2 \operatorname{sen} x \cos x = \cos x$.

Logo, temos duas opções: $\cos x = 0$ ou $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$.

No primeiro caso as soluções são $\dfrac{\mathbf{3}\pi}{\mathbf{2}}$ e
$\dfrac{\mathbf{5}\pi}{\mathbf{2}} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi$.

No segundo caso as soluções são
$\dfrac{\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{\mathbf{13}\pi}{\mathbf{6}}$ e
$\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{\mathbf{17}\pi}{\mathbf{6}}$.

Questão 5: (2,0 pts) Se dois triângulos ABC e DEF são semelhantes com razão de semelhança igual a k, mostre que $\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = k^2$, onde A indica a área.

Solução: Sendo BC a base do triângulo ABC com $m(BC) = a$ e altura h, segue que $M(EF) = \frac{a}{k}$ e a altura é $\frac{h}{k}$. Assim,

$\frac{A_{ABC}}{A_{DEF}} = \frac{\frac{ah}{2}}{\frac{ah}{2k^2}} = k^2$.