CEDERJ

Avaliação a Distância 1

Pré-Cálculo

1. (a) [1,0 ponto] Diz-se que o número inteiro a é múltiplo do número inteiro b quando é possível encontrar um outro número inteiro n tal que $a = nb$. Use essa definição para justificar as respostas para as seguintes perguntas:

   A soma de três números inteiros e consecutivos é um múltiplo de 3?

   Resolução

   Sim. Considere três números inteiros consecutivos quaisquer: $x, \quad x+1, \quad x+2$.
   A soma S dos números é: $S = x + (x+1) + (x+2)$.
   Aplicando as propriedades associativa, comutativa e distributiva, obtemos
   $S = x + x + x + 1 + 2 = 3x + 3 = 3(x+1) = (x+1)\cdot 3$.
   A soma S é um múltiplo de 3 porque encontramos o inteiro $n = x+1$ tal que $S = n \cdot 3$.

   A soma de quatro números inteiros e consecutivos é um múltiplo de 4?

   Resolução

   Não. Contraexemplo: 1; 2; 3; 4.
   Esses números são inteiros e consecutivos (hipótese verdadeira).
   A soma S é: $S = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 = 2 \times 4 + 2$.
   Logo o resto da divisão de 10 por 4 é igual a 2 e concluímos que 10 não é múltiplo de 4.

   (b) [1,0 ponto] Use o Algoritmo de Euclides para resolver e justificar as respostas do seguinte problema:
   Em um determinado campo, a cada 6 anos a partir de 1927, plantou-se uma árvore da espécie X no primeiro dia do ano.
   Quantas árvores da espécie X foram plantadas nesse campo até hoje? Em que ano será plantada a próxima árvore?

Resolução

Seja N o número de dias 1 do ano após o ano de 1927.

Em 1927 temos $N = 0$, em 1928 temos $N = 1$, em 1929 temos $N = 2$, em 1930 temos $N = 3$, em 1931 temos $N = 4$, em 1932 temos $N = 5$, $\cdots$, em 2009 temos $N = 2009 - 1927 = 82$.

Se planta-se árvores de 6 em 6 anos, concluímos que a partir de 1927, planta-se árvores quando

$N = 0, \quad N = 6, \quad N = 12, \quad N = 18, \quad N = 24, \quad N = 30, \quad \cdots$

Se $N = 6p + r, \quad 0 \le r \le 5$, concluímos que

quando $r = 0$ planta-se árvore e quando $r = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ não planta-se árvore.

A quantidade q de árvores pode ser pensada assim

quando $N = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ temos $q = 1$, quando $N = 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11$ temos $q = 2$, quando $N = 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17$ temos $q = 3$.

Quando $N = 6p + r, \quad 0 \le r \le 5$, concluímos que $q = p + 1$.

Em 2009, $\quad N = 2009 - 1927 = 82 = 13 \times 6 + 4 \quad$ logo $\quad q = 13 + 1 = 14$.

Assim, até 2009 plantou-se 14 árvores e a próxima árvore será plantada daqui a 2 anos, em 2011.

2. [2,0 pontos] Considere a seguinte lista de números reais:

$$\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}};\quad \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};\quad \frac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}};\quad \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

(a) [0,5 pontos] Separe em dois subconjuntos, um dos reais negativos e outro dos positivos.

Resolução

Positivos: $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$ Negativos: $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};\ \dfrac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$

(b) [1,5 pontos] Escreva a lista em ordem crescente. Justifique cada ordenação pelas propriedades de ordem dos reais, não será aceita apenas a resposta.

Resolução

Ordenando os positivos. Como os denominadores são todos positivos, podemos multiplicar os dois lados pelos denominadores que a desigualdade será equivalente,

$\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} > \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \Longleftrightarrow \sqrt{2}\left(2+\sqrt{3}\right) > \sqrt{3}\left(2-\sqrt{2}\right) \Longleftrightarrow$

$2\sqrt{2}+\sqrt{6} > 2\sqrt{3}-\sqrt{6} \Longleftrightarrow 2\sqrt{2}+2\sqrt{6} > 2\sqrt{3} \Longleftrightarrow \sqrt{2}+\sqrt{6} > \sqrt{3}.$

Claramente a última desigualdade é verdadeira, pois $\sqrt{6} > \sqrt{3}$ e $\sqrt{2} > 0$.

Logo, como são todas equivalentes, a primeira desigualdade também é verdadeira.

Ordenando os negativos. Como o simétrico de um número negativo é um número positivo, para facilitar vamos ordenar os simétricos: $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$.

Como os numeradores são iguais, basta comparar os denominadores.

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} > \dfrac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} \Longleftrightarrow \sqrt{3}-1 < 2+\sqrt{2} \Longleftrightarrow \sqrt{3} < 3+\sqrt{2}.$

Claramente a última desigualdade é verdadeira, pois $\sqrt{3} < 3$ e $\sqrt{2} > 0$.

Logo, como são todas equivalentes, a primeira desigualdade também é verdadeira.

Multiplicando a primeira desigualdade por -1, concluímos $\dfrac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < \dfrac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$.

Finalmente encontramos a lista em ordem crescente:

$$\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} < \frac{-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

3. [2,0 pontos] Diga se cada afirmação a seguir é verdadeira (V) ou falsa (F).

Caso seja verdadeira, prove usando as propriedades do conjunto numérico.

Caso seja falsa, prove usando propriedades do conjunto numérico ou apresente um exemplo para provar que é falsa. Esse exemplo para provar que é falsa é chamado de contraexemplo. Em um contraexemplo a hipótese da afirmação deve ser verdadeira e a tese da afirmação deve ser falsa.

(a) Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $1,138 < x < 1,149 \Longrightarrow 1,14 < x < 1,15$.

Resposta: Falsa. Contraexemplo: $x = 1,139$.

A hipótese $1,138 < 1,139 < 1,149$ é verdadeira, mas a tese $1,14 < 1,139 < 1,15$ é falsa.

(b) Sendo $x \in \mathbb{R}$ e $1,138 < x < 1,149 \Longrightarrow 1,13 < x < 1,15$.

Resposta: Verdadeira.

Por hipótese, $1,138 < x < 1,149$. Sabemos que $1,13 < 1,138$ e que $1,149 < 1,15$.

Aplicando a propriedade transitiva da ordem, isto é, $a < b$ e $b < c \Longrightarrow a < c$, obtemos $1,13 < 1,138 < x < 1,149 < 1,15 \Longrightarrow 1,13 < x < 1,15$.

(c) Para $x \in \mathbb{R}$ vale a equivalência $\quad (x-2)(x+3)=0 \Longleftrightarrow x=2$ ou $x=-3$.

Resposta: Verdadeira.

Aplicando a propriedade do anulamento do produto, isto é, $a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a=0$ ou $b=0$,
$(x-2)(x+3)=0 \Longleftrightarrow (x-2)=0$ ou $(x+3)=0 \Longleftrightarrow x=2$ ou $x=-3$.

(d) Para $x \in \mathbb{R}$ vale a implicação $\quad (x-2)(x+3)=1 \Longrightarrow x=3$ ou $x=-2$.

Resposta: falsa.

Como **não existe** uma propriedade análoga à do item anterior, isto é,
é **falso** que $a \cdot b = 1 \Longleftrightarrow a=1$ ou $b=1$, vamos resolver a equação usando a propriedade distributiva para obter uma equação do 2o. grau.

$(x-2)(x+3)=1 \Longleftrightarrow x^2+3x-2x-6=1 \Longleftrightarrow x^2+x-7=0$.

Resolvendo, $\quad x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+28}}{2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$.

Encontramos as duas únicas soluções que tornam a equação da hipótese verdadeira.

Mas $\quad \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \neq 3 \quad$ e $\quad \dfrac{-1 \pm \sqrt{29}}{2} \neq -2$.

Logo a implicação é falsa porque quando a hipótese é verdadeira, a tese é falsa.

(e) $\sqrt{(x-1)^2} = x-1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Resposta: falsa. Contraexemplo: $x=-2 \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{(x-1)^2} = \sqrt{(-2-1)^2} = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$.

$x-1 = -2-1 = -3$.

Como $\quad -3 \neq 3$, nesse exemplo $\quad \sqrt{(x-1)^2} \neq x-1$, o que torna a afirmação falsa.

(f) $x \in \mathbb{R}$ e $x \geq 1 \Longrightarrow \sqrt{(x-1)^2} = x-1$.

Resposta: verdadeira.

Lembrando a definição de raiz quadrada de um número real $a \geq 0$.

$\sqrt{a}$ é igual ao <u>único número real b</u> tal que $b^2=a$ e $b \geq 0$.

Em símbolos, para $a \geq 0$, $\sqrt{a} = b \quad ; \quad b^2 = a$ e $b \geq 0$.

Assim, quando $a=(x-1)^2 \geq 0$, $\quad \sqrt{a} = \sqrt{(x-1)^2} = b; \quad b^2 = a = (x-1)^2 \quad$ e $\quad b \geq 0$.

Vamos determinar b.

Por hipótese, $x \geq 1$. Logo $x-1 \geq 0$.

Para $b=x-1$, $\quad b^2=(x-1)^2=a$ e por hipótese, $b=x-1 \geq 0$.

Logo se $x \geq 1$ então $b=(x-1)$ é o único número b tal que $b^2=(x-1)^2$ e $b \geq 0$.

(g) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b} \qquad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Resposta: falsa. Contraexemplo: $\quad a=-4, \quad b=-1$.

$\sqrt{ab} = \sqrt{(-4)(-1)} = \sqrt{4} = 2$.

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{-4}\sqrt{-1} = ?$

Nesse exemplo não podemos calcular $\sqrt{a}\sqrt{b}$, muito menos afirmar que $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

(h) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \qquad \forall a \geq 0, \quad b > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}$.

Resposta. Verdadeira.

$\sqrt{\dfrac{a}{b}} = c\ ; \quad c^2 = \dfrac{a}{b}$ e $c \geq 0$.

Vamos verificar que com as hipóteses $\quad a \geq 0 \quad$ e $\quad b > 0 \quad$ se consideramos $\quad c = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, este valor de c satisfaz as condições de $\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ acima.

$a \geq 0$ e $b > 0 \Longrightarrow \sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ podem ser calculados e $c = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0.$

$$c = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \Longrightarrow c^2 = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{a}{b}.$$

(i) $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $2 < x < 4$, $1 < y < 2,5 \Longrightarrow 3 < x + y < 6,5.$
Resposta. Verdadeiro.
Por um lado, $x > 2 \Longrightarrow x + y > 2 + y.$
Por outro lado, $y > 1 \Longrightarrow 2 + y > 2 + 1 \Longrightarrow 2 + y > 3.$
Logo, aplicando a propriedade transitiva, $x + y > 2 + y$ e $2 + y > 3 \Longrightarrow x + y > 3.$ (*)
Da mesma forma,
por um lado, $x < 4 \Longrightarrow x + y < 4 + y$
por outro lado, $y < 2,5 \Longrightarrow 4 + y < 4 + 2,5 \Longrightarrow 4 + y < 6,5.$
Aplicando a propriedade transitiva, $x + y < 4 + y$ e $4 + y < 6,5 \Longrightarrow x + y < 6,5.$ (**)
Por (*) e (**) concluímos que $3 < x + y < 6,5.$

(j) $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, $2 < x < 4$, $1 < y < 2,5 \Longrightarrow 1 < x - y < 1,5.$
Resposta: falsa. Contraexemplo: $x = 2,5$ e $y = 2.$
A hipótese é verdadeira porque $2 < 2,5 < 4$ e $1 < 2 < 2,5.$
$x - y = 2,5 - 2 = 0,5.$
Mas $0,5 < 1$, logo a tese $1 < x - y < 1,5$ é falsa nesse exemplo.

4. (a) [1,2 pontos] Considere a expressão $\dfrac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}}{2x-1}$, onde x é um número real.

i. Para quais valores de x não é possível calcular essa expressão? Simplifique a expressão de forma a obter uma expressão com apenas um numerador e um denominador.

Resolução.
Não é possível calcular a expressão quando qualquer um dos denominadores se anula, isto é para os valores de x correspondentes a
$x - 1 = 0$ ou $x = 0$ ou $2x - 1 = 0.$
Resolvendo cada uma, $x = 1$ ou $x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{2}.$

Simplificando a expressão,
$$\frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}}{2x-1} = \frac{\dfrac{x + x - 1}{x(x-1)}}{2x-1} = \frac{\dfrac{2x-1}{x(x-1)}}{2x-1} = \frac{2x-1}{x(x-1)} \times \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{x(x-1)}.$$

ii. Represente na reta numérica as soluções de cada equação:

$$\frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}}{2x-1} = -4 \qquad \text{e} \qquad \frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}}{2x-1} = -\frac{4}{x^3}$$

Resolução da primeira equação.
Para os valores de x em que é possível calcular a expressão do lado esquerdo da equação, isto é, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{1}{2}.$

$$\frac{\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}}{2x-1} = -4 \Longleftrightarrow \frac{1}{x(x-1)} = -4 \Longleftrightarrow 1 = -4(x)(x-1) \Longleftrightarrow 1 = -4x^2 + 4x$$
$$\Longleftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Longleftrightarrow (2x-1)^2 = 0 \Longleftrightarrow 2x - 1 = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Mas a única solução não serve porque com esse valor não podemos calcular a expressão do lado esquerdo da equação original.
Conclusão: a primeira equação não tem solução.

Resolução da segunda equação.
Para os valores de x em que é possível calcular as expressões do lado esquerdo e do lado direito da equação, isto é, $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x}}{2x-1} = -\frac{4}{x^3} \iff \frac{1}{x(x-1)} = -\frac{4}{x^3} \iff x^3 = -4(x)(x-1) \iff x^3+4x^2-4x=0$$

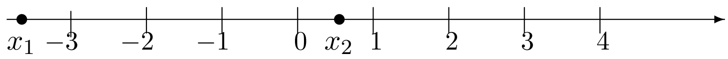
$x\left(x^2+4x-4\right) = 0 \iff x = 0$ ou $x^2+4x-4=0$.

$x = 0$ não é solução porque com esse valor não podemos calcular nenhum dos lados da equação original.

Resolvendo a outra equação, $x^2+4x-4=0$,

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Soluções: $x_1 = -2-\sqrt{2}$ e $x_2 = -2+\sqrt{2}$.



(b) [0,8 pontos] Resolva a seguinte equação em $\mathbb{R}$: $2x^4 - x^2 - 1 = 0$.

Resolução
Considerando $y = x^2$, temos a equação em y: $2y^2 - y - 1 = 0$.

Resolvendo, $y = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \dfrac{1 \pm 3}{4}$.

Soluções em y, $y = 1$ e $y = -\dfrac{1}{2}$. Soluções em x, $x^2 = 1$ e $x^2 = -\dfrac{1}{2}$.

$x^2 = 1 \iff x = 1$ ou $x = -1$.

$x^2 = -\dfrac{1}{2}$, não existe solução real.

Logo as únicas soluções são $x = 1$ e $x = -1$.

5. (a) [1,0 ponto] Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$: $\dfrac{1}{x-2} < \dfrac{x}{x+3}$.

Represente a solução na reta numérica.

Resolução:

$$\frac{1}{x-2} < \frac{x}{x+3} \iff \frac{1}{x-2} - \frac{x}{x+3} < 0 \iff \frac{x+3-x^2+2x}{(x-2)(x+3)} < 0 \iff$$

$$\frac{-x^2+3x+3}{(x-2)(x+3)} < 0 \iff \frac{x^2-3x-3}{(x-2)(x+3)} > 0.$$

Vamos construir uma tabela de sinais da expressão do lado esquerdo da inequação para resolvê-la.

$$x^2-3x-3=0 \iff x = \frac{3 \pm \sqrt{9+12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Estimando as raízes, $4 < \sqrt{21} < 5 \implies 7 < 3+\sqrt{21} < 8 \implies 3,5 < \dfrac{3+\sqrt{21}}{2} < 4$

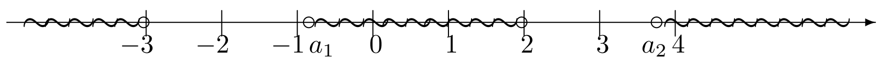
$$-5 < -\sqrt{21} < -4 \implies -2 < 3-\sqrt{21} < -1 \implies -1 < \frac{3-\sqrt{21}}{2} < -0,5.$$

Considere $a_1 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$ e $a_2 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$

	$x < -3$	-3	$-3 < x < a_1$	a_1	$a_1 < x < 2$	2	$2 < x < a_2$	a_2	$x > a_2$
$A = x^2 - 3x - 3$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$B = (x-2)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$C = x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{A}{B \cdot C}$	$+$	nd	$-$	0	$+$	nd	$-$	0	$+$

nd = não definido

Solução S: $x < -3$ ou $\frac{3-\sqrt{21}}{2} < x < 2$ ou $x > \frac{3+\sqrt{21}}{2}$



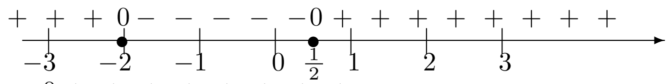
$S = (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3-\sqrt{21}}{2}, 2\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{21}}{2}, \infty\right)$

(b) [1,0 ponto] Considere a equação $\sqrt{(2x-1)(x+2)} = x+3$, x é um número real.

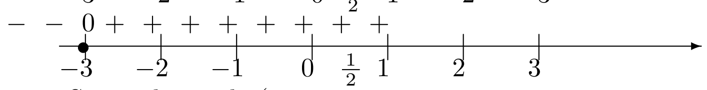
i. Para quais valores de x é possível calcular o radicando tal que $x+3 \geq 0$? Represente esses valores de x na reta numérica.

Resolução:
Para calcular o radicando $(2x-1)(x+2)$ é preciso que $(2x-1)(x+2) \geq 0$.
Logo temos que encontrar os valores de x tais que $(2x-1)(x+2) \geq 0$ e $x+3 \geq 0$.
Precisamos resolver cada inequação e encontrar a interseção entre as soluções.

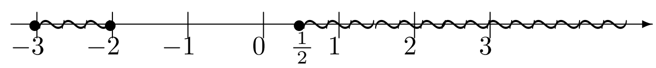
Analisando o sinal de $(2x-1)(x+2)$:



Analisando o sinal de $x+3$:



S_1 = solução de $(2x-1)(x+2) \geq 0$. S_2 = solução de $(x+3 \geq 0$.
Solução:
$S_1 \cap S_2 = [-3, -2] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$



ii. Resolva a equação dada.
Primeiro fazemos as restrições para valores de x: $(2x-1)(x+2) \geq 0$ e $x+3 \geq 0$.
Já encontramos os valores de x das restrições acima no item anterior.

Resolvendo a equação $\sqrt{(2x-1)(x+2)} = x+3$, como estamos admitindo os dois lados positivos podemos elevar os dois lados ao quadrado para obter uma equação equivalente.

$\sqrt{(2x-1)(x+2)} = x+3 \iff (2x-1)(x+2) = (x+3)^2 \iff 2x^2+4x-x-2 = x^2+6x+9 \iff$
$x^2 - 3x - 11 = 0 \iff x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+44}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{53}}{2}$.

Estimando as soluções, $\sqrt{53} > 7 \Longrightarrow 3 + \sqrt{53} > 10 \Longrightarrow \dfrac{3+\sqrt{53}}{2} > 5$.

$-8 < -\sqrt{53} < -7 \Longrightarrow -5 < 3 - \sqrt{53} < -4 \Longrightarrow -2,5 < \dfrac{3-\sqrt{53}}{2} < -2$.

Verificando se as soluções encontradas satisfazem as restrições:
$\dfrac{3+\sqrt{53}}{2} > 5$ e $5 > \dfrac{1}{2} \Longrightarrow \dfrac{3+\sqrt{53}}{2} > \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{3+\sqrt{53}}{2}$ é solução porque satisfaz as restrições.

$-3 < -2,5 < \dfrac{3-\sqrt{53}}{2} < -2 \Longrightarrow x = \dfrac{3-\sqrt{53}}{2}$ é solução porque satisfaz as restrições.