

AP1 - CÁLCULO II - 2013/2 Gabarito

- 1ª Questão (3,0 pontos)** Seja $\mathcal{R}$ a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = 2x^3$, $y = \frac{2}{x}$, $x = 2$ e o eixo x .
- a) Esboce a região $\mathcal{R}$.

Solução

A região pedida é mostrada na Figura 1:

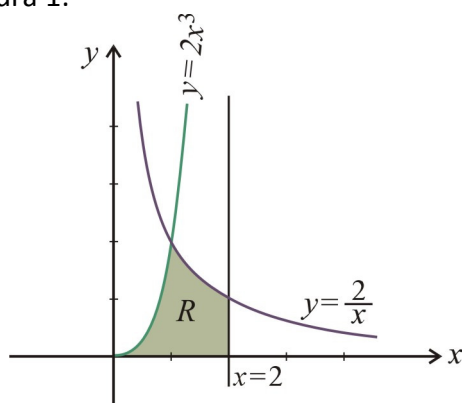


Figura 1

- b) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável x .

Solução

Para representar a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável x , a região $\mathcal{R}$ precisa ser dividida em duas regiões, na Figura 2 mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

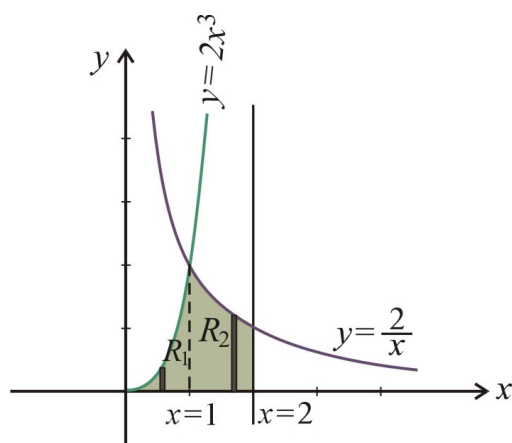


Figura 2

Note que a interseção dos gráficos $y = 2x^3$ e $y = \frac{2}{x}$ ocorre no ponto $(1, 2)$, de abscissa $x = 1$, pois

$$2x^3 = \frac{2}{x} \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow x = 1, \text{ já que estamos no primeiro quadrante. Neste caso, a}$$

representação da área é feita por duas integrais em relação à variável x :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 (2x^3 - 0) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 0\right) dx = \int_0^1 2x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{x} dx$$

c) Represente a área de $\mathcal{R}$ por uma ou mais integrais em relação à variável y .

Para representar a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável y , a região $\mathcal{R}$ precisa também ser dividida em duas regiões, na Figura 3 mostramos um retângulo representativo vertical em cada região.

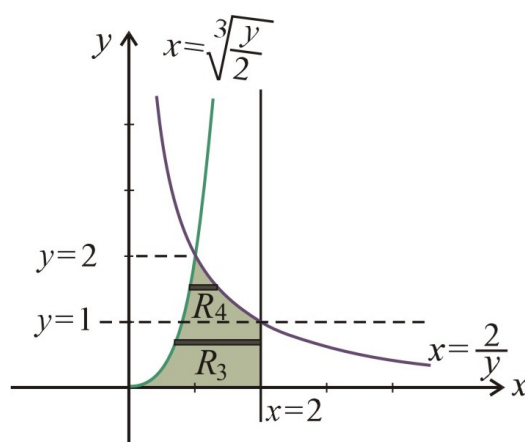


Figura 3

Agora, o ponto de interseção do gráfico $x = \sqrt[3]{\frac{y}{2}}$ com a reta $x = 2$ ocorre na ordenada $y = 1$. Neste

caso, a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável y :

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 \left(2 - \sqrt[3]{\frac{y}{2}}\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{2}{y} - \sqrt[3]{\frac{y}{2}}\right) dy$$

$$\text{ou } \mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 2 dy + \int_1^2 \frac{2}{y} dy - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^2 \sqrt[3]{y} dy$$

d) Calcule a área da região $\mathcal{R}$, usando a representação mais conveniente para você.

Se você decidiu calcular a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável x temos:

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) = \int_0^1 2x^3 dx + \int_1^2 \frac{2}{x} dx = \left[\frac{2x^4}{4}\right]_0^1 + 2 \ln x \Big|_1^2 = \left(\frac{1}{2} + 2 \ln 2\right) \text{ unidades de área.}$$

Se você decidiu calcular a área de $\mathcal{R}$ em relação à variável y temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathcal{R}) &= \int_0^1 2 dy + \int_1^2 \frac{2}{y} dy - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \int_0^2 \sqrt[3]{y} dy = (2y) \Big|_0^1 + 2 \ln y \Big|_1^2 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \frac{y^{4/3}}{4} \Big|_0^2 = \\ &= 2 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4\sqrt[3]{2}} 2\sqrt[3]{2} = 2 + 2 \ln 2 - \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2} + 2 \ln 2 \right) \text{ unidades de área.}\end{aligned}$$

2ª Questão (1,5 pontos) Ache uma função f contínua e um número $a > 0$ tal que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{x}, \text{ para todo } x > 0.$$

Solução

(a) Note que, supondo f contínua para $t > 0$, o integrando $\frac{f(t)}{t^2}$ é uma função contínua para todo número real $t > 0$.

Logo, da 1ª forma do TFC, obtemos $\frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt \right) = \frac{f(x)}{x^2}$, para todo $x > 0$.

Derivando ambos os membros da igualdade dada, temos

$$\frac{d}{dx} \left(6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2} dt \right) = \frac{d}{dx} (2\sqrt{x}), \text{ para todo } x > 0.$$

Isto é, $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, para todo $x > 0$. Logo $\boxed{f(x) = x^{3/2}}$ para todo $x > 0$.

Por outro lado para $x = a > 0$ temos da igualdade dada que $6 + \int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 2\sqrt{a}$

Sabemos que $\int_a^a \frac{f(t)}{t^2} dt = 0$, pois o integrando está bem definido em $a > 0$. Assim resulta $6 = 2\sqrt{a}$, logo $\boxed{a = 9}$.

3ª Questão (2,0 pontos) Calcule as seguintes integrais definidas **imediatas**

a) (1,0) $\int_1^2 2^{-x} dx$ b) (1,0) $\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx$

Solução

a) $\int_1^2 2^{-x} dx = -\int_1^2 (-2^{-x}) dx = -\left(\frac{2^{-x}}{\ln 2} \right) \Big|_1^2 = -\frac{2^{-2}}{\ln 2} + \frac{2^{-1}}{\ln 2} = -\frac{1}{4 \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2} = \frac{1}{4 \ln 2}.$

b) $\int_1^9 \frac{3x-2}{\sqrt{x}} dx = \int_1^9 \left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int_1^9 (3x^{1/2} - 2x^{-1/2}) dx$
 $= \left(3 \frac{x^{3/2}}{3/2} - 2 \frac{x^{1/2}}{1/2} \right) \Big|_1^9 = (2(27) - 4(3)) - (2 - 4) = 44$

4ª Questão (3,5 pontos)

(a) (1,0) Usando a técnica de substituição, calcule $\int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

Solução

Faça a substituição

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 = u - 1 \quad e \quad du = 2x dx$$

$$\begin{aligned} \int x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \int x^2 \sqrt{x^2 + 1} 2x dx = \frac{1}{2} \int (u - 1) \sqrt{u} du = \\ &= \frac{1}{2} \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{1}{2} \left(\frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{3/2}}{3/2} \right) + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} - \frac{(x^2 + 1)^{3/2}}{3} + C. \end{aligned}$$

(b) (1,5) Usando a técnica de integração por partes, encontre $\int_1^{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Solução

$$\text{Faça } u = \arctg\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow du = \frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} dx = -\frac{1}{x^2 + 1} dx \quad e \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \arctg\left(\frac{1}{x}\right) dx &= x \arctg\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2 + 1} dx = x \arctg\left(\frac{1}{x}\right) \Big|_1^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^{\sqrt{3}} = \\ &= \underbrace{\sqrt{3} \arctg \frac{1}{\sqrt{3}}}_{\frac{\pi}{6}} - \underbrace{\arctg 1}_{\frac{\pi}{4}} + \underbrace{\frac{1}{2} \ln 4 - \frac{1}{2} \ln 2}_{\ln 2} = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{\pi}{12} (2\sqrt{3} - 3) + \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

(c) (1,0) Usando a técnica de potências e produtos de funções trigonométricas, ache

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec x dx.$$

Solução

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} x \sec x dx = \int (\sec^2 x - 1) \operatorname{tg} x \sec x dx \quad (*)$$

$$\text{Faça } u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \operatorname{tg} x dx \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos

$$= \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u + C = \frac{\sec^3 x}{3} - \sec x + C.$$