Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Cálculo II – AD1 (2009/2) GABARITO

1ª Questão (2 pontos) Use somas de Riemann para encontrar a área da região entre o gráfico da função $g(y)=4y^2-y^3$ e o eixo y sobre o intervalo $1\le y\le 3$. Esboce a região.

Solução

Usando os conhecimentos adquiridos na disciplina de Cálculo I, estamos em condições de desenhar o polinômio de terceiro grau $g(y)=4y^2-y^3$, assim a região pedida é mostrada na Figura 1.

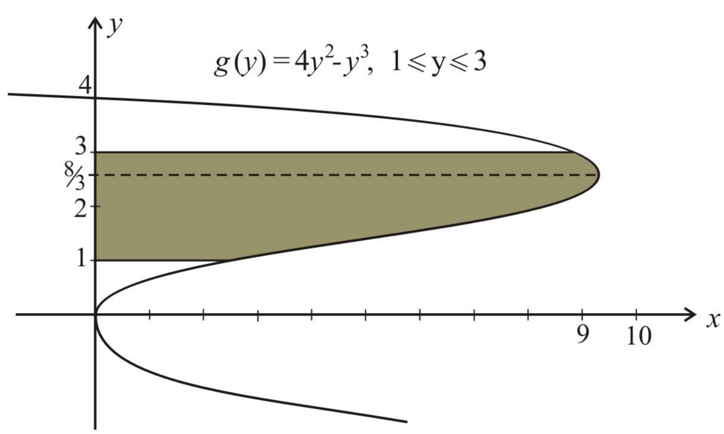


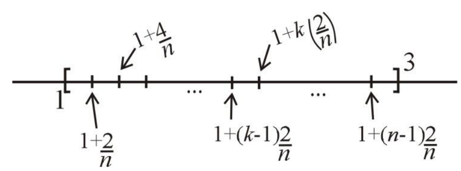
Figura 1

Observe que a função $g(y)=4y^2-y^3$ é contínua em [1,3] e portanto integrável em [1,3].
Alem disso $g(y)>0 \quad para \quad y\in[1,3]$ e usando a definição 2.2 temos que a área pedida é o número :

$A(R)=\int_1^3 (4y^2-y^3)\,dy=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, para qualquer seqüencia (S_n) de somas de Riemann de g em [1,3].

Assim, considerando $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}=\dfrac{b-a}{n}=\dfrac{3-1}{n}=\dfrac{2}{n}$, para $b=3$, $a=1$ e $k=1,\ldots,n$.

Observe que para cada inteiro $n\ge 1$ consideramos os pontos:



Observe também que

$$a=1=y_0,\quad y_1=1+\frac{2}{n},\quad y_2=1+2(\frac{2}{n})\quad ,\ldots,\quad y_k=1+k(\frac{2}{n})\quad ,\ldots,\quad y_n=1+n(\frac{2}{n})=3.$$

Como $t_k \in [y_{k-1}, y_k]$; (pode-se escolher por exemplo os extremos superiores dos sub- intervalos) $t_k = y_k = 1 + k(\frac{2}{n})$. Logo,

$$g(t_k) = g(1 + k(\frac{2}{n})) = 4(1 + k(\frac{2}{n}))^2 - (1 + k(\frac{2}{n}))^3$$

Assim, a Soma de Riemann de $g(y) = 4y^2 - y^3$ sobre [1,3] será :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} g(t_k)(y_k - y_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} [4(1 + \frac{2k}{n})^2 - (1 + \frac{2k}{n})^3](\frac{2}{n})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 4(1 + \frac{2k}{n})^2(\frac{2}{n}) - \sum_{k=1}^{n} (1 + \frac{2k}{n})^3(\frac{2}{n})$$

$$= \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{4k}{n} + \frac{4k^2}{n^2}) - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(1 + \frac{6k}{n} + \frac{12k^2}{n^2} + \frac{8k^3}{n^3})$$

$$= \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n}1 + \frac{32}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{32}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}1 - \frac{12}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k - \frac{24}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$S_n = \frac{6}{n}\sum_{k=1}^{n}1 + \frac{20}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 - \frac{16}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3$$

$$= \frac{6}{n}(n) + \frac{20}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) + \frac{8}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) - \frac{16}{n^4}\left(\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right)$$

$$= 6 + 10\left(\frac{(n+1)}{n}\right) + \frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right) - 4\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}\right)$$

$$S_n = 6 + 10\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left((1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})\right) - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Assim, lembrando que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\int_1^3 (4y^2 - y^3)\, dy = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [6 + 10\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{4}{3}\left((1 + \frac{1}{n})(2 + \frac{1}{n})\right) - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2]$$

$$= 6 + 10(1) + \frac{4}{3}((1)(2)) - 4(1)^2 = 12 + \frac{8}{3} = \frac{44}{3}$$ unidades de área.

2ª Questão (2 pontos) Dada a função $F(x)=\int_0^{-x}\frac{t^2-2t}{t^2+4}\,dt$, mostre que F é derivável em $\mathbb{R}$ e determine:

a) $F'(x)$
b) os números críticos de F,
c) os intervalos em que F é crescente e os intervalos em que F é decrescente,
d) se F tem um máximo local ou um mínimo local ou nenhum dos dois.
e) os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de F é côncavo para cima.

Solução

Verifica-se que $F(x)=(G\circ h)(x)$ onde $G(x)=\int_0^{x}\frac{t^2-2t}{t^2+4}\,dt$ pelo teorema fundamental do cálculo é derivável em $\mathbb{R}$ (Veja que o integrando é uma função contínua) e $G'(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+4}$. Por outro lado $h(x)=-x$ também é derivável em $\mathbb{R}$ e $h'(x)=-1$. Assim pela regra da cadeia tem-se que $F(x)=(G\circ h)(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

a) $F'(x)=(G\circ h)'(x)=G'(h(x))\,h'(x)=\frac{(-x)^2-2(-x)}{(-x)^2+4}(-1)=-(\frac{x^2+2x}{x^2+4})$.

b) Para achar os números críticos de F procuramos os pontos onde $F'(x)=0$ ou não existe F'. Como neste caso F' sempre existe os únicos números críticos são os números tais que $x^2+2x=x(x+2)=0$ isto é $x=0$ e $x=-2$.

c) os intervalos em que F é crescente e os intervalos em que F é decrescente,

Intervalos	$-\infty<x<-2$	$-2<x<0$	$0<x<+\infty$
Sinal de x	–	–	+
Sinal de $x+2$	–	+	+
Sinal de x^2+4	+	+	+
Sinal de $F'(x)$	–	+	–
Comportamento de F	↘	↗	↘

Podemos afirmar então que F é crescente em $(-2,0)$ e F é decrescente em $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$.

d) Note que como F é derivável em $\mathbb{R}$ podemos concluir que F é contínua em $\mathbb{R}$, por outro lado de (c) e o teste da derivada primeira podemos concluir que F tem um mínimo local em $x=-2$ e que F tem um máximo local em $x=0$.

e) $F''(x) = -(\frac{x^2+2x}{x^2+4})' = -(\frac{(x^2+4)(2x+2)-(x^2+2x)(2x)}{(x^2+4)^2})$

$$F''(x) = -(\frac{2x^3+8x+2x^2+8-2x^3-4x^2}{(x^2+4)^2}) = \frac{2}{(x^2+4)^2}(x^2-4x-4)$$

Observe que $F''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-4x-4=0 \Leftrightarrow x = 2\pm 2\sqrt{2}$

Intervalos	$-\infty < x < 2-2\sqrt{2}$	$2-2\sqrt{2} < x < 2+2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2} < x < +\infty$
Sinal de x^2-4x-4	+	–	+
Sinal de x^2+4	+	+	+
Sinal de $F''(x)$	+	–	+
Concavidade do gráfico de F	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Podemos afirmar então que o gráfico de F é côncavo para baixo em $(2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2})$ e o gráfico de F é côncavo para cima em $(-\infty, 2-2\sqrt{2}) \cup (2+2\sqrt{2}, +\infty)$.

3ª Questão (2 pontos) Calcule

a) $\int_{-3}^{1} |x^3 - x|dx$ **b)** $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{x\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}} dt}{x-\frac{\pi}{4}}$

Solução

a) $|x^3-x| = \begin{cases} x^3-x & \text{se} \quad x^3-x \geq 0 \\ -x^3+x & \text{se} \quad x^3-x<0 \end{cases} = \begin{cases} x^3-x & \text{se} \quad (x^2-1)x \geq 0 \\ -x^3+x & \text{se} \quad (x^2-1)x<0 \end{cases}$

Observe que $(x^2-1)x = (x-1)(x+1)x$

Intervalos	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Sinal de $x+1$	–	+	+	+
Sinal de x	–	–	+	+
Sinal de $x-1$	–	–	–	+
Sinal de $(x^2-1)x$	–	+	–	+
$\|x^3-x\|$	$-x^3+x$	x^3-x	$-x^3+x$	x^3-x

Resumindo temos que $|x^3-x| = \begin{cases} x^3-x & \text{se} \quad x\in(-1,0)\cup(1,+\infty) \\ -x^3+x & \text{se} \quad x\in(-\infty,-1)\cup(0,1) \end{cases}$

Assim $\int_{-3}^{1} |x^3-x|dx = \int_{-3}^{-1} |x^3-x|dx + \int_{-1}^{0} |x^3-x|dx + \int_{0}^{1} |x^3-x|dx$

$$= \int_{-3}^{-1} -x^3 + x \; dx + \int_{-1}^{0} x^3 - x \; dx + \int_{0}^{1} -x^3 + x \; dx$$

$$= -\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-3}^{-1} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\Bigg]_{-1}^{0} + (-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2})\Bigg]_{0}^{1}$$

$$= -\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^2}{2} - (-\frac{(-3)^4}{4} + \frac{(-3)^2}{2}) \; -(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^2}{2}) + (-\frac{1^4}{4} + \frac{1^2}{2})$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3^4}{4} - \frac{3^2}{2} \; -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \; -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{33}{2}.$$

b) Note que $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{x\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt}{x - \frac{\pi}{4}} \to \dfrac{0}{0}$, portanto podemos aplicar a regra de L´Hôpital

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{x\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt}{x - \frac{\pi}{4}} \underbrace{=}_{L'H} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{d}{dx}(x\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt)}{\frac{d}{dx}(x - \frac{\pi}{4})} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{x\frac{d}{dx}(\int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt) + \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt}{1}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \left(x\frac{\text{sen}\, x}{x} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{x} \frac{\text{sen t}}{\text{t}}\, dt \right) = \text{sen}\frac{\pi}{4} + 0 = \text{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4ª Questão (2 pontos) Seja R a região compreendida entre os gráficos de $y = x^3$ e $x = y^2$ sobre o intervalo $-1 \le y \le 1$.

a) Esboce a região R .

b) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x.

c) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação á variável y.

d) Calcule a área da região R (Use a representação mais conveniente).

Solução

a) O esboço da região R é apresentado na Figura 2.

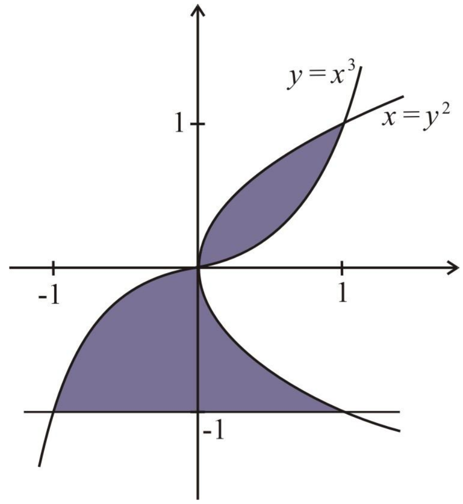


Figura 2

b) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x.

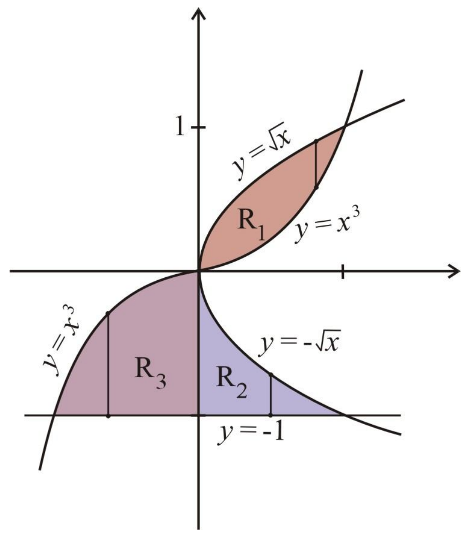


Figura 3

Observe que neste caso devemos dividir a região em 3 sub-regiões R_1, R_2 e R_3. Assim

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) + A(R_3)$$

$$A(R) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx + \int_0^1 (-\sqrt{x} - (-1))dx + \int_{-1}^0 (x^3 - (-1))dx$$

$$A(R) = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)dx + \int_0^1 (-\sqrt{x} + 1)dx + \int_{-1}^0 (x^3 + 1)dx$$

c) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação á variável y.

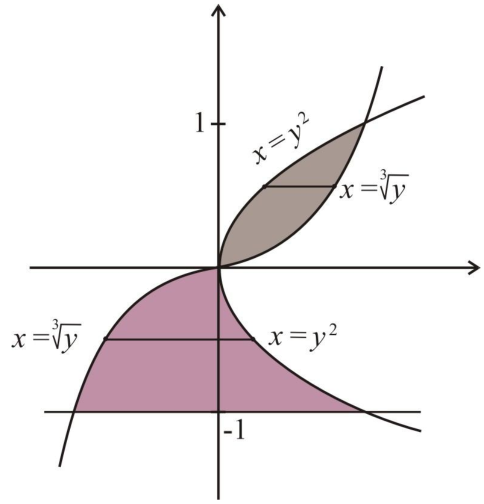


Figura 4

Neste caso só precisamos dividir a região em 2 sub-regiões, logo

$$A(R)=\int_{-1}^{0}(y^2-\sqrt[3]{y})dy+\int_{0}^{1}(\sqrt[3]{y}-y^2)dy$$

d) Para calcular a área usaremos a representação em relação à variável y

$$A(R)=\left.\frac{y^3}{3}-\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}\right]_{-1}^{0}+\left.\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{1}=-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{3(-1)^{\frac{4}{3}}}{4}+\frac{3(1)^{\frac{4}{3}}}{4}-\frac{(1)^3}{3}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$ unidades de área.

5ª Questão (2 pontos) Considere a função $H(x)=x^2\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds\right)}\operatorname{sen}(t^3)\,dt$.

Mostre que H é derivável em $\mathbb{R}$ e encontre $H'(x)$.

Solução

Seja $H(x)=x^2\left[\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds\right)}\operatorname{sen}(t^3)\,dt\right]=x^2\ F(x)$, onde

$$F(x)=\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds\right)}\operatorname{sen}(t^3)\,dt$$

Pelas propriedades da integral definida obtemos que

$$F(x)=\left[\int_{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)}^{0} \operatorname{sen}(t^3)\,dt+\int_0^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds\right)} \operatorname{sen}(t^3)\,dt\right]$$

Ou seja

$$F(x)=\left[-\int_0^{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)} \operatorname{sen}(t^3)\,dt+\int_0^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds\right)} \operatorname{sen}(t^3)\,dt\right]$$

Defina $F_1(x)=-\int_0^{\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)} \operatorname{sen}(t^3)\,dt$ e $F_2(x)=\int_0^{\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}\,ds\right)} \operatorname{sen}(t^3)\,dt$ para $x\in\mathbb{R}$. Note que $F(x)=F_1(x)+F_2(x)$ é definida para todo $x\in\mathbb{R}$. Para mostrar que F é derivável em $\mathbb{R}$ basta provar que $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são deriváveis em $\mathbb{R}$.

Verifica-se que $F_1(x)=(G_1\circ h_1)(x)$ onde $G_1(x)=-\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt$ pelo teorema fundamental do cálculo é derivável em $\mathbb{R}$ e $h_1(x)=\dfrac{5x}{x^2+7}$ também é derivável em $\mathbb{R}$ sendo $G_1'(x)=-\operatorname{sen}(x^3)$ e $h_1'(x)=\dfrac{(x^2+7)5-5x(2x)}{(x^2+7)^2}=\dfrac{5(7-x^2)}{(x^2+7)^2}$. Assim pela regra da cadeia tem-se que $F_1(x)=(G_1\circ h_1)(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$\boxed{F_1'(x)=(G_1\circ h_1)'(x)=G_1'(h_1(x))\,h_1'(x)=-\operatorname{sen}\left(\left(\frac{5x}{x^2+7}\right)^3\right).\frac{5(7-x^2)}{(x^2+7)^2}}$$

. Analogamente, verifica-se que $F_2(x)=(G_2\circ h_2)(x)$, onde $G_2(x)=\int_0^x sen(t^3)\,dt$ pelo teorema fundamental do cálculo é derivável em $\mathbb{R}$ e $G_2'(x)=\operatorname{sen}(x^3)$.

Por outro lado $h_2(x)=\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds=(F_3\circ h_3)(x)$ onde $F_3(x)=\int_1^x\dfrac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds$ pelo teorema fundamental do cálculo é derivável em $\mathbb{R}$ e $h_3(x)=2\sqrt[3]{x^2+1}$ e também derivável em $\mathbb{R}$, sendo $F_3'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ e $h_3'(x)=\dfrac{2}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}(2x)=\dfrac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}$.

Assim pela regra da cadeia tem-se que $h_2(x)=(F_3\circ h_3)(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$h_2'(x)=(F_3\circ h_3)'(x)=F_3'(h_3(x))\,h_3'(x)=\frac{1}{\sqrt{(2\sqrt[3]{x^2+1})^2+1}}.\frac{4x}{3(x^2+1)^{\frac{2}{3}}}=\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x^2+1})^2\sqrt{4(\sqrt[3]{x^2+1})^2+1}}$$

Logo pela regra da cadeia novamente tem-se que $F_2(x)=(G_2\circ h_2)(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$ e

$$F_2'(x)=(G_2\circ h_2)'(x)=G_2'(h_2(x))\,h_2'(x)=\operatorname{sen}\left(\left(\int_1^{2\sqrt[3]{x^2+1}}\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}ds\right)^3\right).\frac{4x}{3(\sqrt[3]{x^2+1})^2\sqrt{4(\sqrt[3]{x^2+1})^2+1}}$$

Note que $H(x)=x^2.F(x)$. É claro que x^2 é derivável em $\mathbb{R}$ e acabamos de mostrar que F é derivável em $\mathbb{R}$. Como o produto de funções deriváveis é derivável, finalmente podemos afirmar que $H(x)=x^2F(x)=x^2(F_1(x)+F_2(x))$ é derivável em $\mathbb{R}$ e usando a regra do produto temos que

$$\begin{aligned} H'(x)&=x^2(F_1(x)+F_2(x))'+2x(F_1(x)+F_2(x)) \\ &=x^2(F_1'(x)+F_2'(x))+2x(F(x)) \end{aligned} \qquad (*)$$

Substituindo em (*) os valores de $F(x), F_1'(x)$ e $F_2'(x)$ achados acima obtemos a resposta.