Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AD2 – Álgebra Linear II – 2014/1
Gabarito

AVISO: É obrigatório, nas resoluções de sistemas lineares, reduzir por linhas à forma em escada a matriz associada ao sistema.

Questão 1 (3,0 pontos) Seja $v = (1, 2, 2)$.

a) [1,6 pts] Determine uma base ortonormal $\beta = \{u_1, u_2, u_3\}$ do $\mathbb{R}^3$ tal que u_3 tenha mesma direção e sentido de v e $u_1 \times u_2 = u_3$.

b) [0,4 pt] Determine a matriz A_β que representa na base β a rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos, no sentido positivo, em torno da reta ℓ gerada por v.

c) [1,0 pt] Determine a matriz A, que representa na base canônica, a rotação de $\frac{3\pi}{2}$ radianos, no sentido positivo, em torno da reta ℓ gerada por v.

Solução:

a) Escolhemos, primeiramente, uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ com $v_3 = v = (1, 2, 2)$. Os dois primeiros vetores v_1 e v_2 devem estar no plano Γ de equação $x + 2y + 2z = 0$, plano normal a v passando pela origem.

Tomamos $v_1 = (0, 1, -1)$, fazendo $x = 0$, $y = 1$ e obtendo $z = -1$.

Seja $v_2 = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$\begin{cases} v_2 \in \Gamma \iff a + 2b + 2c = 0 \\ v_2 \perp v_1 \iff \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \iff \langle (0, 1, -1), (a, b, c) \rangle = 0 \iff 0a + b - c = 0 \iff b - c = 0. \end{cases}$$

Nesse caso, a matriz associada ao sistema acima é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Reduzindo por linhas à forma em escada, obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, onde fizemos a operação elementar em $\sim_1$: $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$.

Assim, $a + 4c = 0$ e $b - c = 0$ e logo, $v_2 = (-4c, c, c)$, $c \in \mathbb{R}$.

Fazemos $c = 1$ e escolhemos $v_2 = (-4, 1, 1)$.

Temos que $v_1 \times v_2 = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\overrightarrow{i} - (-4)\overrightarrow{j} + 4\overrightarrow{k} = (2, 4, 4) = 2v_3$ tem mesma direção e sentido de v_3.

Logo, $\{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base ortogonal orientada positivamente (vale a regra da mão direita).

Normalizando esses vetores, obtemos que

$$\beta = \left\{ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), u_2 = \left(-\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}\right), u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ com $u_3 = u_1 \times u_2$ e u_3 tendo mesma direção e sentido de $v = v_3$.

b)
$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos\frac{3\pi}{2} & -\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} & 0 \\ \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2} & \cos\frac{3\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $A = PA_\beta P^{-1}$, onde P é a matriz de mudança de base, da base β para a base canônica, é dada por $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ e $P^{-1} = P^t$ (P é matriz ortogonal). Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{bmatrix}.$$

Questão 2 (2,8 pontos) Seja Π o plano gerado por $u = (1, 1, -1)$ $v = (0, 1, 1)$. Considere o operador linear S reflexão com respeito ao plano Π.

a) [1,2 pt] Dê exemplo de uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de S, indicando os seus autovalores.

b) [0,8 pt] Determine uma matriz ortogonal P que diagonaliza S e a sua correspondente matriz diagonal D.

c) [0,8 pt] Determine a matriz A que representa S na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

Solução:

a) Como $u, v \in \Pi$, então $S(u) = u$ e $S(v) = v$, logo u e v são autovetores de S associados ao autovalor 1. Temos que $u \perp v$, pois $\langle u, v\rangle = \langle (1, 1, -1), (0, 1, 1)\rangle = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0$.

Seja $w = u \times v = \det \begin{bmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} = (2, -1, 1)$.

Como $w \perp \Pi$, então $S(w) = -w = (-1) \cdot w$, logo w é autovetor de S associado ao autovalor -1.

Portanto, $\{u, v, w\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de S. Normalizando esses vetores, obtemos que

$$\alpha = \left\{ u_1 = \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \frac{v}{\|v\|} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}},\right), u_3 = \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right) \right\}$$

é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de S associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = -1$.

b) Seja $\alpha = \{u_1, u_2, u_3\}$ a base de autovetores de S obtida no item (a).

Uma matriz ortogonal P que diagonaliza S é a matriz de mudança de base, da base ortonormal α para a base canônica, dada por $P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$ e sua correspondente matriz diagonal é $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

c) $P^{-1} = P^t$, pois P é matriz ortogonal e

$$\begin{aligned} A &= PDP^{-1} = PDP^t \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Questão 3 (2,8 pontos)

Sejam a, b, c números reais e consideremos o operador linear definido por

$$T(x,y,z) = \left(ax + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z, bx + \frac{2}{\sqrt{6}}y - \frac{1}{\sqrt{6}}z, cx + \frac{1}{\sqrt{2}}z\right).$$

a) [0,4 pt] Determine a matriz de T na base canônica.

b) [2,0 pts] Determine os números reais a, b, c para que T seja um operador ortogonal.

c) [0,4 pt] Quantos operadores ortogonais há? Justifique a sua resposta.

Solução:

a) Como $T(1,0,0) = (a,b,c)$, $T(0,1,0) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0\right)$ e $T(0,0,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, então

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ b & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ c & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

b) T é um operador ortogonal se, e somente se, as colunas (ou linhas) da matriz A são unitárias e ortogonais. Note que $\frac{1}{3} + \frac{4}{6} + 0 = 1$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = 1$ e $\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + 0 = 0$. Logo,

$$\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad (\star) \\ \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{6}} + 0 = 0 \text{ e} \\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$$

Primeiramente, vamos resolver o sistema linear homogêneo $\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{6}} + 0 = 0 \\ \frac{a}{\sqrt{3}} - \frac{b}{\sqrt{6}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 0. \end{cases}$

Reduzindo por linhas à forma em escada a matriz associada ao sistema, obtemos:
$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sim_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \sim_2 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \sim_3 \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \sim_4$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$, matriz reduzida por linhas à forma em escada.
Fizemos a seguinte sequência de operações elementares:
em $\sim_1$: $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$; em $\sim_2$: $L_2 \leftarrow \frac{-\sqrt{6}}{3} L_2$; em $\sim_3$: $L_1 \leftarrow L_1 - \frac{2}{\sqrt{6}} L_2$ e em $\sim_4$: $L_1 \leftarrow \sqrt{3} L_1$.
Logo, $a + \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} c = 0$ e $b - \frac{\sqrt{3}}{3} c = 0$.
Portanto, $a = -\frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} c$ e $b = \frac{\sqrt{3}}{3} c$.
Substituindo em $(\star)$, obtemos

$$1 = \frac{2}{3} c^2 + \frac{1}{3} c^2 + c^2 = 2c^2,$$

logo $c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Então,
$a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou
$a = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $b = -\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ e $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

c) Há dois operadores ortogonais, pois há duas possibilidades de matrizes ortogonais

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Questão 4 (1,4 pontos) Seja T a projeção ortogonal sobre a reta normal a $(3,4)$ passando pela origem.

a) [0,6 pt] Dê exemplo de uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T, indicando os autovalores.

b) [0,8 pt] Determine $T(x,y)$.

Solução:
(a) A projeção ortogonal T sobre uma reta ℓ tem as seguintes propriedades:

Se $u \in \ell$, então $T(u) = u$. Logo, $u \in \ell$ e $u \neq (0,0)$ é autovetor de T associado ao autovalor 1.
Se $u \perp \ell$, então $T(u) = (0,0) = 0u$. Logo, $u \perp \Pi$ e $u \neq (0,0)$ é autovetor de T associado ao autovalor 0.
Como $(3,4)$ é normal a ℓ, então $(-4,3) \perp (3,4)$, logo $(-4,3) \in \ell$. Tomamos

$$v_1 = (-4,3) \in \ell, \ v_2 = (3,4) \perp \ell.$$

Normalizando esses vetores, obtemos que

$$\beta = \left\{ u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5} \right), u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right) \right\}$$

é uma base ortonormal do $\mathbb{R}^2$ formada por autovetores de T associados, respectivamente, aos autovalores $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0$.

(b) Usamos a base β obtida no item (a). Seja $v = (x, y)$

Temos que $v = \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2$ e

$T(v) = \langle v, u_1 \rangle T(u_1) + \langle v, u_2 \rangle T(u_2) = \langle v, u_1 \rangle u_1$, pois $T(u_1) = u_1$ e $T(u_2) = (0, 0)$.

Logo,

$$\begin{array}{rcl} T(x,y) = T(v) & = & \langle v, u_1 \rangle u_1 \\ & = & \langle (x,y), \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \rangle \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \\ & = & \frac{-4x+3y}{5} \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) \\ & = & \left(\frac{16x-12y}{25}, \frac{-12x+9y}{25}\right). \end{array}$$

Logo, $T(x, y) = \left(\frac{16x-12y}{25}, \frac{-12x+9y}{25}\right)$.