Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP1– Equações Diferenciais – 2009/1

Soluções!

Questão 1 [2,5 pts] Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x\,\dfrac{dy}{dx} = y + x\ e^{y/x} & \quad x > 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

Solução: Dividindo a equação diferencial do PVI por x obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{y/x}, \tag{1}$$

que é do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(y/x),$$

e portanto é uma equação de coeficientes homogêneos.

Fazendo a mudança de variáveis $v = y/x$, obtemos $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ e a equação (1) se escreve como

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^v,$$

isto é

$$x\frac{dv}{dx} = e^v.$$

Ou ainda

$$e^{-v}\ dv = \frac{dx}{x} \tag{2}$$

Integrando a equação separável (2),

$$-e^{-v} = ln(x) + c,$$

o que nos dá, após substituirmos v por y/x,

$$ln(x) + e^{y/x} = c$$

Impondo a condição inicial $y(1) = 1$, calcula-se $c = e$

Portanto a solução do PVI proposto é a função definida implicitamente pela equação

$$ln(x) + e^{y/x} = e.$$

Questão 2 [2,5 pts]
Mostre que a função constante $y = 1$ é uma solução de

$$\frac{dy}{dx} + (2x-1)y - xy^2 = x - 1,$$

e calcule a solução geral

Verifique se é possível obter a solução $y = 1$ a partir da fórmula da solução geral, calculando um valor conveniente para a constante de integração.

Solução:

A verificação de que $y \equiv 1$ é solução da equação é imediata:

$$\begin{aligned} y = 1 \quad &\Rightarrow \quad y' = 0 \\ \left(\frac{dy}{dx} + (2x-1)y - xy^2 = x - 1\right)|_{y=1} \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 + (2x-1) - x = x - 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad x - 1 = x - 1. \end{aligned}$$

A equação dada é uma equação de Riccati, para a qual conhecemos a solução $y \equiv 1$.

Introduzindo a variável z por meio da fórmula

$$y = 1 + \frac{1}{z},$$

temos $y' = -z'/z^2$ e $y^2 = 1 + 1/z^2 + 2/z$. Substituindo essas expressões na equação $\dfrac{dy}{dx} + (2x-1)y - xy^2 = x - 1$ obtemos

$$-\frac{z'}{z^2} + (2x-1)\left(1 + \frac{1}{z}\right) - x\left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z}\right) = x - 1.$$

Depois de simplificada, a última equação acima se reduz à equação diferencial linear de primeira ordem

$$z' + z + x = 0.$$

Daí,

$$z = e^{-\int dx} \left(\int e^{\int dx} \, (-x) \, dx + c \right)$$

$$z = e^{-x} \left(-\int e^{x} x dx + c \right) = e^{-x}(-xe^{x} + e^{x} + c)$$

Portanto

$$z = 1 - x + c \, e^{-x}$$

Então

$$y = 1 + \frac{1}{1 - x + c \, e^{-x}} = \frac{2 - x + ce^{-x}}{1 - x + c \, e^{-x}}$$

Suponhamos que c_0 é o valor da constante c correspondente à solução $y \equiv 1$. Devemos ter, para todo x:

$$1 = \frac{2 - x + c_0 e^{-x}}{1 - x + c_0 e^{-x}}$$

De onde concluímos que

$$1 = 2,$$

uma contradição.

Portanto não existe tal c_0 ea questão chama a atenção para o fato de que devemos rever nossa noção intuitiva de solução geral.

Nem todas as soluções de uma equação "estão contidas" na fórmula da (ou de uma) solução geral.

Questão 3 [2,5 pts]

Calcule uma expressão $f(x, y) = c, \; c \in \mathbb{R}$, que defina soluções implícitas $y(x)$ da equação diferencial separável

$$(x^2 y^2 - x^2) \; dy - (4x^3 y^2 - 2y^2) \; dx = 0$$

Solução: A equação se escreve como

$$x^2 (y^2 - 1) \; dy = 2y^2 (2x^3 - 1) \; dx,$$

ou ainda

$$\frac{y^2 - 1}{2y^2} \; dy = \frac{2x^3 - 1}{x^2} \; dx,$$

de onde vemos que se trata de uma equação separável.

Escrevendo a última equação acima na forma

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2} \right) \; dy = \left(2x - \frac{1}{x^2} \right) \; dx,$$

podemos integrá-la imediatamente, obtendo

$$\frac{y}{2} + \frac{1}{2y} = x^2 + \frac{1}{x} + c,$$

ou seja

$$\underbrace{\frac{y}{2} + \frac{1}{2y} - x^2 - \frac{1}{x}}_{f(x,y)} = c$$

Questão 4 [2,5 pts]

Calcule uma família a um parâmetro de curvas planas definindo implicitamente soluções da equação não-separável

$$\left(x^2y^3 - \frac{1}{1+x^2}\right) y' \; + x^3y^2 = 0$$

Solução: Sejam

$$M = \left(x^2y^3 - \frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{e} \quad N = x^3y^2.$$

Observamos que

$$M_y = N_x = 3x^2y^2,$$

de modo que a equação é exata.

Existe F tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2y^3 - \frac{1}{1+x^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3y^2 \tag{4}$$

Integrando (4) com realção y:

$$F(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + g(x) \tag{5}$$

Derivando (5) com respeito a x e igualando a (3), obtemos

$$x^2y^3 + g'(x) = x^2y^3 - \frac{1}{1+x^2}$$

Assim,

$$g'(x) = -\frac{1}{1+x^2},$$

$$g(x) = -arctg(x),$$

e

$$F(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} - arctg(x).$$

As soluções da equação proposta são definidas implicitamente pela família de curvas plans

$$\frac{x^3y^3}{3} - arctg(x) = c$$
