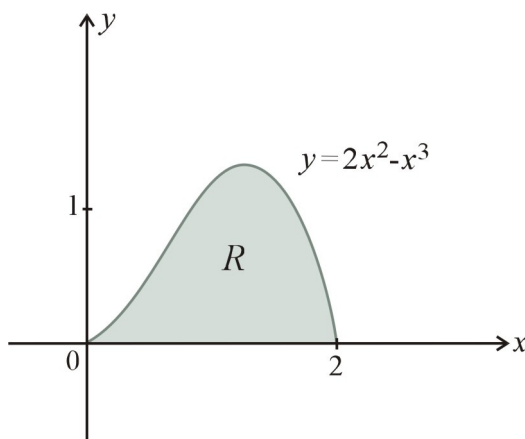


AP3- CÁLCULO II- 2012/2 GABARITO

1ª Questão (3,0 pontos) Considere a região R sombreada mostrada na seguinte figura:



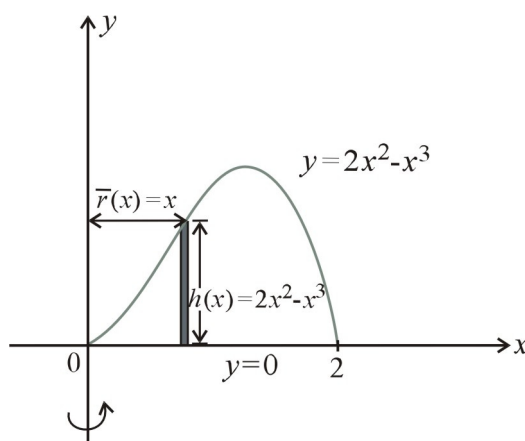
(a) (1,0 ponto) Calcule a área da região R .

(b) (2,0 pontos) Use o método das cascas cilíndricas para achar o volume do sólido S gerado pela rotação em torno do eixo Oy da região R .

Solução

(a) $A(R) = \int_0^2 [2x^2 - x^3] dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = \frac{16}{3} - \frac{16}{4} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$ unidades de área.

(b)



$$V = 2\pi \int_0^2 \bar{r}(x)h(x)dx \quad \text{onde} \quad \bar{r}(x) = x \geq 0 \quad \text{e} \quad h(x) = 2x^2 - x^3 \geq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 2$$

Assim

$$V(R) = 2\pi \int_0^2 x(2x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx = 2\pi \left[\frac{2x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = 2\pi \left(8 - \frac{32}{5} \right) = \frac{16\pi}{5}$$

unidades de volume.

2ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) (1,5 ponto) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

(b) (1,5 ponto) $\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x} dx$

Solução

(a) Observe que $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{3/2}}$ é contínua no intervalo $[e, +\infty)$ assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não limitado $[e, +\infty)$.

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} \quad (1)$$

Por outro lado

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} \stackrel{\substack{u = \ln x \\ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}}}{=} \int \frac{du}{u^{3/2}} = \frac{u^{-(3/2)+1}}{-(3/2)+1} + C = -\frac{2}{u^{1/2}} + C = -\frac{2}{(\ln x)^{1/2}} + C \quad (2)$$

Assim de (1), (2) e a 2ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo resulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_e^b \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{2}{(\ln x)^{1/2}} \right]_e^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{(\ln b)^{1/2}} + \frac{2}{1} \right) = \underbrace{\lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{(\ln b)^{1/2}} \right)}_0 + 2 = 2.$$

(b) A função $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x}$ é uma função racional própria. O denominador tem dois fatores, um linear e um quadrático irredutível, logo a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x} = \frac{x^2 + 3}{x(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} \quad (*)$$

Para determinar os valores de A , B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $x(x^2 + 2)$, obtendo

$$x^2 + 3 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)x$$

Isto é

$$x^2 + 3 = (A + B)x^2 + Cx + 2A$$

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ C = 0 \\ 2A = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ C = 0 \\ A = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (**)$$

Substituindo em (*) os valores achados em (**) temos

$$\frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x} = \frac{3}{2x} - \frac{x}{2(x^2 + 2)}$$

Assim

$$\int \frac{x^2 + 3}{x^3 + 2x} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{4} \int \frac{2x dx}{x^2 + 2} = \frac{3}{2} \ln |x| - \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2) + C.$$

3ª Questão (1,5 ponto) Usando critérios de convergência determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_5^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{(x-3)^2}$$

Solução

Note que para $\forall x \in \mathbb{R}$ resulta que $0 \leq \sin^2 x \leq 1$ e em particular,

$$\text{para } x \geq 5 \quad 0 \leq \frac{\sin^2 x}{(x-3)^2} \leq \frac{1}{(x-3)^2} \quad (1)$$

$$\text{Por outro lado } \int_5^{+\infty} \frac{1}{(x-3)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_5^b \frac{1}{(x-3)^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{(x-3)^{-1}}{-1} \right]_5^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{b-3} + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} \quad (2)$$

Logo de (1), (2) e o critério de comparação resulta que $\int_5^{+\infty} \frac{\sin^2 x dx}{(x-3)^2}$ converge.

4ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,0 ponto) Resolva a equação diferencial: $(1 + \operatorname{tg} y) y' = x^2 + 1$

(b) (1,5 ponto) Resolva o problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y' = \frac{1}{x} y + x \operatorname{sen} x \\ y(\pi) = 0 \end{cases}$$

Solução

(a) Da equação dada temos que $(1 + \operatorname{tg} y) \frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

Podemos separar as variáveis na forma:

$$(1 + \operatorname{tg} y) dy = (x^2 + 1) dx \Rightarrow \int (1 + \operatorname{tg} y) dy = \int (x^2 + 1) dx \Rightarrow$$

$y - \ln |\cos y| = \frac{x^3}{3} + x + C$ ou $y + \ln |\sec y| = \frac{x^3}{3} + x + C$ é a solução, dada na forma implícita, da equação diferencial dada.

(b) Da equação diferencial dada segue que $y' - \frac{1}{x} y = x \operatorname{sen} x$ é linear, com $p(x) = -\frac{1}{x}$ e

$q(x) = x \operatorname{sen} x$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\int p(x) dx = -\int \frac{1}{x} dx = -\ln |x| = \ln |x|^{-1}$. Por outro lado do valor inicial vemos que

$x > 0$, assim $\ln |x|^{-1} = \ln x^{-1}$. Portanto, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^{-1}} = x^{-1}$.

$$\text{Logo } \underbrace{y' \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} y}_{\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} y \right)} = \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} y \right) = \operatorname{sen} x \Rightarrow \frac{1}{x} y = \int \operatorname{sen} x dx + C$$

Isto é $\frac{1}{x} y = -\cos x + C \Rightarrow y = -x \cos x + Cx$ é a solução geral da equação diferencial dada.

Para resolver o problema de valor inicial observe que $y(\pi) = -\pi \underbrace{\cos \pi}_{-1} + C\pi = 0 \Rightarrow C = -1$.

Portanto a solução do problema de valor inicial dado é: $y = -x \cos x - x$.