

Gabarito da AP1 - CÁLCULO II - 2012/2

1ª Questão (2,5 pontos) Considere a função $f(x) = x^2 - 4$, $x \in [-3, 0]$.

(a) (0,5) Faça o esboço do gráfico da função f no intervalo dado.

(b) (1,0) Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-3, 0]$.

(c) (1,0) Calcule $\int_{-3}^0 f(x) dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

Solução

(a) O gráfico da função f no intervalo $[-3, 0]$ é mostrado na figura 1

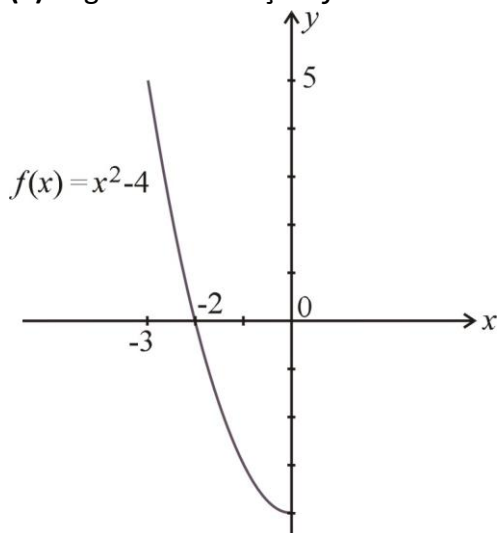


Figura 1

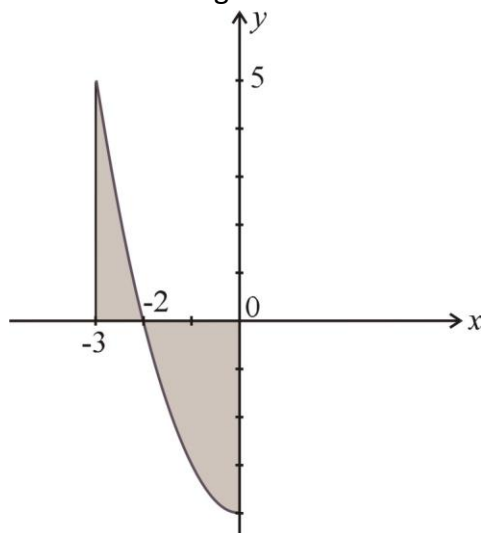


Figura 2

(b) A área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-3, 0]$ mostrada na figura 2 e é dada por

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \int_{-3}^{-2} f(x) dx + \left(-\int_{-2}^0 f(x) dx\right) = \int_{-3}^{-2} (x^2 - 4) dx + \int_{-2}^0 (-x^2 + 4) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x \right]_{-2}^0 = \left[-\frac{8}{3} + 8 + 9 - 12 \right] + \left[-\frac{8}{3} + 8 \right]$$

$$= \left[\frac{7}{3} \right] + \left[\frac{16}{3} \right] = \frac{23}{3} \text{ unidades de área.}$$

(c)

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_{-3}^0 (x^2 - 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 4x \right) \Big|_{-3}^0 = 9 - 12 = -3.$$

A integral definida $\int_{-3}^0 f(x) dx$ neste caso pode ser interpretada como a diferença de duas áreas, lembre que

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = \int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx = A(R_1) + (-A(R_2)) = A(R_1) - A(R_2) \quad (*)$$

Onde as regiões R_1 e R_2 são mostradas na Figura 3. $A(R_1)$ é a área da região R_1 e $A(R_2)$ é a área da região R_2 . A diferença neste caso é o número negativo -3 e indica que a diferença dada em (*) é negativa isto é $A(R_1) < A(R_2)$ o que pode ser visto também na Figura 3.

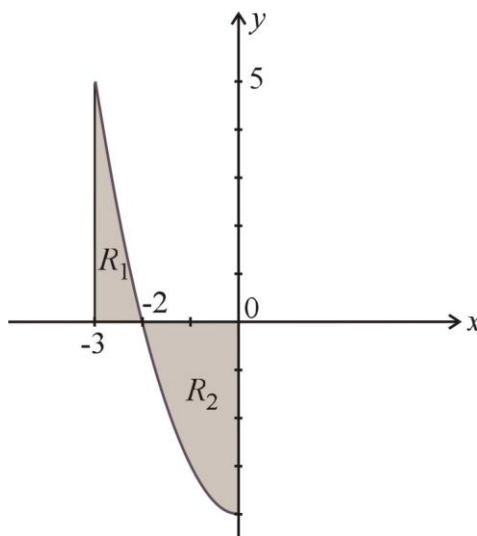


Figura 3

2ª Questão (2,0 pontos) Seja $G(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{t^2} dt$, e considere $H(x) = x G(x)$.

(a) Calcule $G'(x)$.

(b) Ache $H'(x)$ e depois calcule $H'(2)$.

Solução

(a) Observe que o integrando $f(t) = e^{t^2}$ é uma função contínua para todo t número real.

$$G(x) = \int_{2x}^{x^2} e^{t^2} dt = \int_{2x}^a e^{t^2} dt + \int_a^{x^2} e^{t^2} dt$$

Logo

$$G(x) = - \int_a^{2x} e^{t^2} dt + \int_a^{x^2} e^{t^2} dt$$

Assim utilizando a 1ª forma do TFC e a regra da cadeia em cada somando obtemos

$$G'(x) = -e^{(2x)^2} [2x]' + e^{(x^2)^2} [x^2]'$$

Ou seja

$$G'(x) = -e^{4x^2} (2) + e^{x^4} (2x) = 2xe^{x^4} - 2e^{4x^2}.$$

$$(b) \quad H'(x) = x G'(x) + G(x)$$

Assim usando o resultado obtido em (a) resulta que

$$H'(x) = x (2xe^{x^4} - 2e^{4x^2}) + \int_{2x}^{x^2} e^{t^2} dt$$

Portanto

$$H'(2) = 2 (4e^{16} - 2e^{16}) + \underbrace{\int_4^4 e^{t^2} dt}_0 = 4e^{16}$$

3ª Questão (2,0 pontos) Calcule as seguintes integrais imediatas

$$(a) (1,0) \quad \int_0^1 (2-x)\sqrt{x} dx$$

$$(b) (1,0) \quad \int_1^4 e^{\ln x} dx$$

Solução

$$(a) \quad \int_0^1 (2-x)\sqrt{x} dx = \int_0^1 (2\sqrt{x} - x\sqrt{x}) dx = \int_0^1 (2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) dx = 4 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

$$(b) \quad \int_1^4 e^{\ln x} dx = \int_1^4 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 = \frac{16}{2} - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}.$$

4ª Questão (3,5 pontos)

$$(a) (1,0) \text{ Usando a técnica de substituição calcule } \int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

Solução

Faça a substituição

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsen u + C = \arcsen(\ln x) + C.$$

$$(b) (1,5) \text{ Usando a técnica de integração por partes encontre } \int (\ln x)^2 dx$$

Solução

Faça

$$u = \ln x^2 \Rightarrow du = 2 \ln x \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

Assim,

$$\int (\ln x)^2 dx = x \ln x^2 - \int x 2 \ln x \frac{1}{x} dx = x \ln x^2 - 2 \int \ln x dx \quad (1)$$

Por outro lado a integral $\int \ln x dx$ também pode ser resolvida usando integração por partes

Faça

$$u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx, \quad dv = dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) resulta

$$\int (\ln x)^2 dx = x \ln x^2 - 2x \ln x + 2x + C$$

(c) (1,0) Usando a técnica de potências e produtos de funções trigonométricas ache

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x dx$$

Solução

Note que

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx$$

 $\sec^2 x - 1$

$$= \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \sec x \operatorname{tg} x dx = \int (\sec^4 x - \sec^2 x) \sec x \operatorname{tg} x dx \quad (*)$$

$$\text{Faça } u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \operatorname{tg} x dx \quad (**)$$

Substituindo (**) em (*) temos

$$\int \operatorname{tg}^3 x \sec^3 x dx = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C.$$