PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA
2ª. AVALIAÇÃO À DISTÂNCIA
2º. Semestre de 2010
Profa. Keila Mara Cassiano

Versão Tutor

1) **(3,0 pontos)** Um grupo de pessoas foi classificado quanto a peso e pressão arterial de acordo com as proporções do quadro a seguir:

Pressão Arterial	*Peso*			
	Excesso	Normal	Deficiente	Total
Alta	0,10	0,08	0,02	0,20
Normal	0,15	0,45	0,20	0,80
Total	0,25	0,53	0,22	1,00

a) Qual a probabilidade de uma pessoa escolhida ao acaso neste grupo ter pressão alta?
b) Se for verificada que a pessoa escolhida tem excesso de peso, qual a probabilidade de ela ter também pressão alta?
c) Os eventos "excesso de peso" e "pressão alta" são independentes?
d) Suponha que uma segunda pessoa seja escolhida ao acaso. Qual a condição para que este segunda escolha seja independente da primeira?

2) **(3,0 pontos)** A caixa I tem duas bolas brancas e duas pretas; a caixa II tem duas bolas brancas e uma preta; a caixa III tem uma bola branca e três pretas.
a) Retira-se uma bola de cada caixa. Qual a probabilidade de serem todas elas brancas?
b) Escolhe-se uma caixa ao acaso e retira-se uma bola. Qual a probabilidade de ela ser branca?
c) Escolhe-se uma caixa ao acaso e retira-se uma bola. Qual a probabilidade de ter sido da caixa I, se a bola é branca?

3) **(3,0 pontos)** Uma fábrica tem 3 máquinas *A*, *B* e *C* que respondem respectivamente por 40%, 35% e 25% de sua produção. A proporção de peças defeituosas na máquina *A* é de 2%. Essa proporção é de 1% na máquina *B* e de 3% na máquina *C*. A inspeção da Gerencia de Controle de Qualidade sorteará uma máquina ao acaso e dela coletará, também ao acaso, uma peça.
a) Qual a probabilidade de esta peça ser defeituosa?
b) Sabendo que a peça é defeituosa, qual a máquina mais provável de tê-la produzida?

4) **(1,0 pontos)** Se *A* e *B* são eventos independentes, $\Pr(A) = 0{,}25$ e $\Pr(B) = 0{,}60$, então determine:
a) $\Pr(A \cap B)$;
b) $\Pr(A \mid B)$.

Solução:

1 QUESTÃO.
a) Como a pessoa escolhida ao acaso de um grupo onde 20% têm pressão alta, então, se chamarmos de *A* o evento "ter pressão alta", a probabilidade pedida é:

$$\boxed{\Pr(A) = 0{,}20.}$$

b) Se chamamos de *B* o evento "ter excesso de peso", temos um caso de probabilidade condicional, onde o que se tem *a priori* é o conhecimento de que a pessoa escolhida tem excesso de peso (evento *B*). Assim, o que se pede é:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}.$$

Podemos ver na tabela do problema que $\Pr(A \cap B)$ =0,10 e que $\Pr(B)$ =0,25.

Assim, $\Pr(A \mid B) = \dfrac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \dfrac{0{,}10}{0{,}25} = 0{,}40.$

$$\boxed{\Pr(A \mid B) = 0{,}40.}$$

c) Para verificar se dois eventos são independentes, pode-se comparar os produtos de suas respectivas probabilidades com a probabilidade da interseção entre eles. Logo, sendo *B* o evento "ter excesso de peso" e *A* o evento "ter pressão alta", temos:

$\Pr(A) = 0{,}20.$ $\Pr(B) = 0{,}25.$ Assim, $\Pr(A)\Pr(B) = 0{,}20 \times 0{,}25 = 0{,}05.$
$\Pr(A \cap B)$ =0,10.
Como: $\Pr(A)\Pr(B) \neq \Pr(A \cap B)$, então os eventos *A* e *B* **NÃO SÃO INDEPENDENTES**.

d) A condição para que um segundo sorteio seja independente do primeiro é de que estes sorteios sejam feitos **com reposição dos elementos da amostra.**

Assim, para que as escolhas da questão sejam feitas de forma independente, é preciso que a pessoa sorteada inicialmente **volte ao grupo** para o segundo sorteio.

2 QUESTÃO.
a) O que queremos é a interseção entre os três eventos: B_I *(bola branca na caixa I)*, B_{II} *(bola branca na caixa II)*, B_{II} *(bola branca na caixa III)*$_I$, como as retiradas são independentes, então a probabilidade requerida é:

$$\Pr(B_I \cap B_{II} \cap B_{III}) = \Pr(B_I)\Pr(B_{II})\Pr(B_{III}) = \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12}$$

$$\boxed{\Pr(brancas) = 1/12}$$

b) Este é um problema de Teorema da Probabilidade Total.
Sejam os eventos: *I: "escolha da caixa I"; II: "escolha da caixa II" e III: "escolha da caixa III"*.Temos que a escolha de qualquer uma das três caixas é equiprovável, então, $\Pr(I) = \Pr(II) = \Pr(III) = 1/3$.

Notemos que na caixa *I* há duas bolas brancas e duas pretas, então a probabilidade de selecionar uma bola branca na caixa *I* será: $\Pr(B \mid I) = 2/4 = 1/2$. Com este mesmo raciocínio, percebemos que $\Pr(B \mid II) = 2/3$ e $\Pr(B \mid III) = 1/4$.
Assim,

$$\Pr(B) = \Pr(I)\Pr(B \mid I) + \Pr(II)\Pr(B \mid II) + \Pr(III)\Pr(B \mid III) = \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = \frac{6+8+3}{36} = \frac{17}{36}.$$

Logo:

$$\boxed{\Pr(branca) = 17/36.}$$

c) Agora, deseja-se saber $\Pr(I \mid B)$.
Com os dados obtidos no item anterior e pela fórmula da probabilidade condicional, temos:

$$\Pr(I \mid B) = \frac{\Pr(I \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{\Pr(I)\Pr(B \mid I)}{\Pr(B)} = \frac{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}}{\frac{17}{36}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{36}} = \frac{1}{6}\times\frac{36}{17} = \frac{6}{17}.$$

$$\boxed{\Pr(I \mid B) = 6/17.}$$

3 QUESTÃO.
a) Neste problema temos a seguinte situação:

Sejam os eventos:
A: "escolha da máquina *A*",
B: "escolha da máquina *B*",
C: "escolha da máquina *C*",
D: "a peça é defeituosa".
Como consta no enunciado, cada máquina é responsável por um percentual das peças produzidas nesta fábrica. Este percentual determina a probabilidade de uma peça sair dela.
Assim,
$\Pr(A) = 0{,}40$, $\Pr(B) = 0{,}35$ e $\Pr(C) = 0{,}25$.
Também com base no percentual de peças defeituosas em cada máquina, temos:
$\Pr(D \mid A) = 0{,}02$, $\Pr(D \mid B) = 0{,}01$ e $\Pr(D \mid C) = 0{,}03$.
Pelo Teorema da Probabilidade Total,

$$\Pr(D) = \Pr(A)\Pr(D \mid A) + \Pr(B)\Pr(D \mid B) + \Pr(C)\Pr(D \mid C)$$
$$\Pr(D) = (0{,}40)\times(0{,}02) + (0{,}35)\times(0{,}01) + (0{,}25)\times(0{,}03) = 0{,}0080 + 0{,}0035 + 0{,}0075 = 0{,}019.$$

Logo:

$$\boxed{\Pr(D) = 0{,}019}$$

b)
Para sabermos qual das três máquinas é a mais provável de produzir uma peça defeituosa sorteada aleatoriamente, precisamos calcular as probabilidades das três máquinas produzirem a peça defeituosa. Para isso, usaremos o Teorema de Bayes.

<u>Máquina *A*</u>:

$$\Pr(A \mid D) = \frac{\Pr(A)\Pr(D \mid A)}{\Pr(D)} = \frac{0{,}40 \times 0{,}02}{0{,}019} = \frac{0{,}008}{0{,}019} = 0{,}421 \text{ . Logo: } \boxed{\Pr(A \mid D) = 0{,}421.}$$

<u>Máquina *B*</u>:

$$\Pr(B \mid D) = \frac{\Pr(B)\Pr(D \mid B)}{\Pr(D)} = \frac{0{,}35 \times 0{,}01}{0{,}019} = \frac{0{,}0035}{0{,}019} = 0{,}184 \text{ . Logo: } \boxed{\Pr(B \mid D) = 0{,}184.}$$

<u>Máquina *C*</u>:

$$\Pr(C \mid D) = \frac{\Pr(C)\Pr(D \mid C)}{\Pr(D)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}03}{0{,}019} = \frac{0{,}0075}{0{,}019} = 0{,}395. \text{ Logo: } \boxed{\Pr(C \mid D) = 0{,}395.}$$

Logo, como a maior probabilidade encontrada foi a da máquina *A*, então ela é a mais provável.

Resposta:

$$\boxed{\text{Máquina } A}$$

4 QUESTÃO.
a)
Como *A* e *B* são independentes, então $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B) = 0{,}25 \times 0{,}60 = 0{,}15.$
Logo:

$$\boxed{\Pr(A \cap B) = 0{,}15.}$$

b)
Usando a fórmula de Probabilidade Condicional e o resultado do item anterior, temoa:

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \frac{0{,}15}{0{,}60} = 0{,}25.$$

Outra forma também de simples observação: Como *A* e *B* são independentes, a probabilidade de A condicionada a B não depende de B, ou seja: $\Pr(A \mid B) = \Pr(A) = 0{,}25.$
Logo:

$$\boxed{\Pr(A \mid B) = 0{,}25.}$$