

AP3- CÁLCULO II- 2012/1 GABARITO

1ª Questão (3,5 pontos) Considere a região R compreendida entre os gráficos de $y = \frac{1}{x}$ e $y = \sqrt{x}$ com $1 \leq x \leq 4$.

(a) (1,0 ponto) Esboce R . A região é mostrada a seguir

Solução

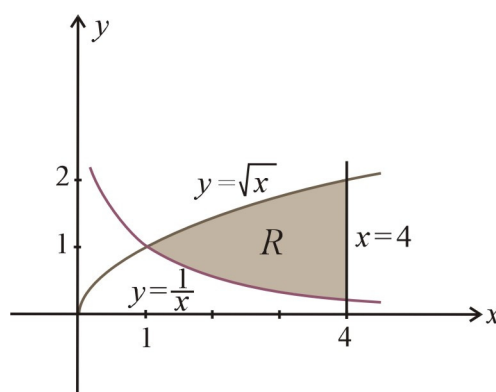


Figura 1

(b) (1,0 ponto) Calcule a área de R .

Solução

$$A(R) = \int_1^4 \left[\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right] dx = 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \ln x \Big|_1^4 = \frac{16}{3} - \ln 4 - \frac{2}{3} + \ln 1 = \frac{14}{3} - \ln 4 \text{ unidades de área.}$$

(c) (1,5 pontos) Expresse, **mas não calcule** o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox , usando o método dos discos circulares.

Solução

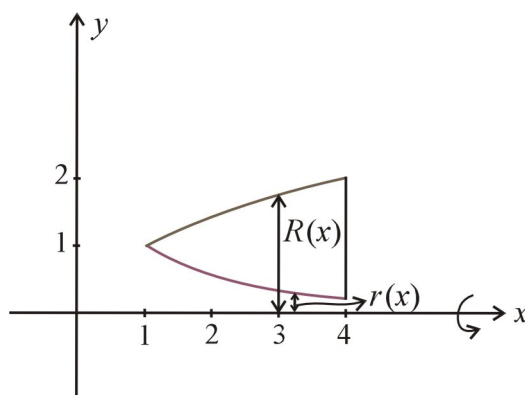


Figura 2

Neste caso o raio do disco típico ou arruela é perpendicular ao eixo x e a integração será feita em relação à x . O raio maior é $R(x) = \sqrt{x}$ e $1 \leq x \leq 4$. O raio menor é $r(x) = \frac{1}{x}$ e $1 \leq x \leq 4$. Na Figura 2, mostramos a região, o eixo de rotação e os raios indicados.

A fórmula a ser utilizada é $V = \pi \int_a^b [(R(x))^2 - (r(x))^2] dx$. Assim

$$V = \pi \int_1^4 \left[(\sqrt{x})^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2 \right] dx$$

2ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) (1,5 ponto) $\int \frac{x+1}{(x^2+9)} dx$

Solução

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+9} dx &= \int \frac{x}{x^2+9} dx + \int \frac{1}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx + \int \frac{1}{x^2+3^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+9) + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right) + C \end{aligned}$$

(b) (1,5 ponto) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx$

Solução

Observe que $f(x) = \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ é contínua no intervalo $[1, +\infty)$ assim a integral dada resulta uma integral imprópria sobre o intervalo não limitado $[1, +\infty)$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx \quad (1)$$

Por outro lado

$$\int \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx \stackrel{\substack{u = \frac{1}{x} \\ du = -\frac{1}{x^2} dx}}{\equiv} \int -\operatorname{sen} u du = \cos u + C = \cos \frac{1}{x} + C \quad (2)$$

Assim de (1), (2) e a 2ª parte do Teorema Fundamental do Cálculo resulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \operatorname{sen} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \cos \frac{1}{x} \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{b} - \cos 1 \right) = \cos \underbrace{\left(\lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{b} \right)}_0 - \cos 1 = 1 - \cos 1.$$

3ª Questão (1,0 ponto) Usando apenas critérios de convergência determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{2x+1}$$

Solução

$$\text{Visto que } x \geq 0 \Rightarrow e^x \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2x+1} \leq \frac{e^x}{2x+1} \quad (*)$$

Por outro lado $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x+1} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_0^b = +\infty$, isto é $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{2x+1}$ é divergente (**)

Assim de (*), (**) e o critério de comparação temos que $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{2x+1}$ é divergente.

Outra forma de resolver o exercício é provar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x+1} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$. Assim $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x+1} \neq 0$,

então por um dos critérios estudados em aula isso implica que $\int_0^{+\infty} \frac{e^x dx}{2x+1}$ diverge.

4ª Questão (2,5 pontos)

a) **(1,0 ponto)** Calcule a solução geral da equação: $\frac{dy}{dx} - \sin x \cos x = 0$

Solução Da equação dada segue que $\frac{dy}{dx} = \sin x \cos x$ logo $y = \int \sin x \cos x dx$

Faça $u = \sin x \Rightarrow du = \cos x dx$, logo a solução geral da equação dada resulta

$$y = \int \sin x \cos x dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C.$$

b) **(1,5 ponto)** Resolva o problema de valor inicial:
$$\begin{cases} y' + \frac{5}{x}y + 3x^3 = 0 \\ y(1) = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Solução

Da equação diferencial dada segue que $y' + \frac{5}{x}y = -3x^3$ é linear, com $p(x) = \frac{5}{x}$ e $q(x) = -3x^3$.

Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\int p(x) dx = \int \frac{5}{x} dx = 5 \ln |x| = \ln |x|^5$. Por outro lado do valor inicial vemos que

$x > 0$, assim $\ln |x|^5 = \ln x^5$. Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^{\ln x^5} = x^5$. Logo

$$\underbrace{x^5 y' + 5x^4 y}_{\frac{d}{dx}(x^5 y)} = -3x^3 x^5 \Rightarrow \frac{d}{dx}(x^5 y) = -3x^8 \Rightarrow x^5 y = \int -3x^8 dx + C$$

Isto é $x^5 y = -3 \frac{x^9}{9} + C \Rightarrow y = -\frac{x^4}{3} + \frac{C}{x^5}$ é a solução geral da equação diferencial dada. Para

resolver o problema de valor inicial observe que $y(1) = -\frac{1^4}{3} + \frac{C}{1^5} = \frac{2}{3} \Rightarrow C = 1$. Portanto a

solução do problema de valor inicial dado é: $y = -\frac{x^4}{3} + \frac{1}{x^5}$.