

Cálculo II – AD1 (2014/1) Gabarito

Solução da 1ª Questão

Considere a figura 1.1 abaixo, representando o mesmo gráfico dado no enunciado

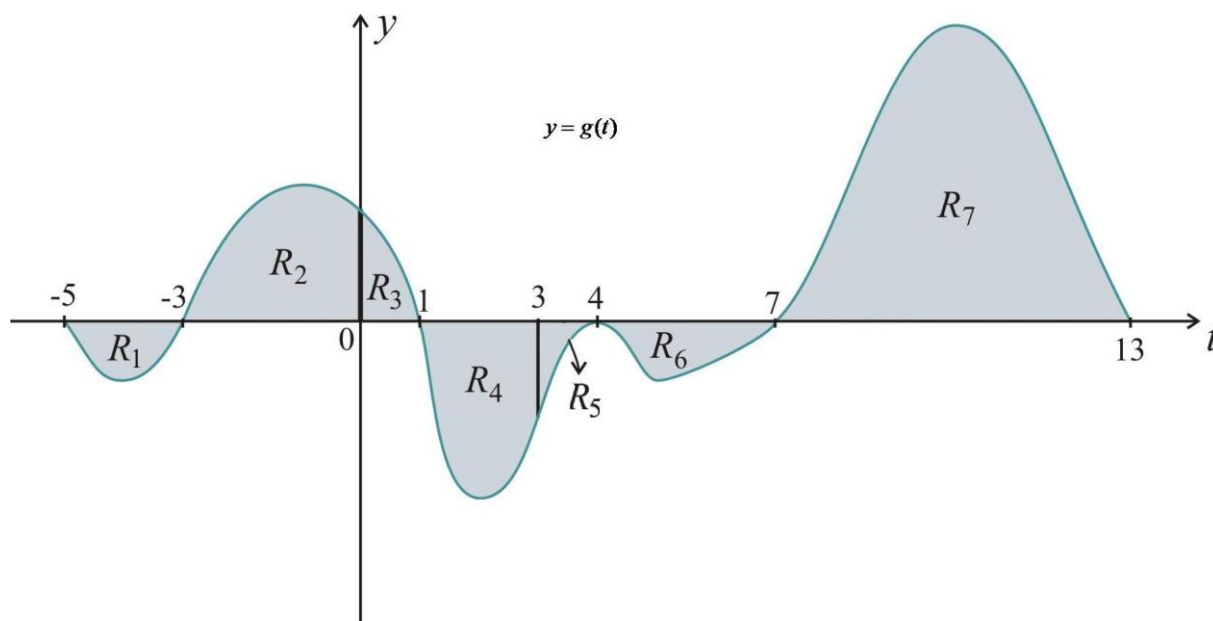


Figura 1.1

Denotemos por

$A_1 = \text{área}(R_1)$, $A_2 = \text{área}(R_2)$, $A_3 = \text{área}(R_3)$, $A_4 = \text{área}(R_4)$, $A_5 = \text{área}(R_5)$, $A_6 = \text{área}(R_6)$ e $A_7 = \text{área}(R_7)$.

De acordo com os dados do enunciado, a figura naturalmente nos dá que:

$$A_1 = 3, A_2 = 6, A_3 = 1, A_4 = 7, A_5 = 2, A_6 = 1 \text{ e } A_7 = 15$$

- a) Por definição $G(-5) = \int_{-5}^{-5} g(t) dt = 0$, como visto no caderno didático, uma vez que os extremos de integração são os mesmos, ambos iguais a -5 e g esta definida em $t = -5$.

Pela definição 2.2 do caderno didático, tem-se:

$$A_1 = -\int_{-5}^{-3} g(t) dt, \quad A_2 = \int_{-3}^0 g(t) dt, \quad A_3 = \int_0^1 g(t) dt, \quad A_4 = -\int_1^3 g(t) dt, \quad A_5 = -\int_3^4 g(t) dt, \\ A_6 = -\int_4^7 g(t) dt \text{ e } A_7 = \int_7^{13} g(t) dt.$$

Cálculo de $G(-3)$:

Por definição: $G(-3) = \int_{-5}^{-3} g(t) dt = -A_1 = -3$, isto é, $\boxed{G(-3) = -3}$

Cálculo de $G(0)$:

Novamente, usando a definição, a proposição 2.2 do caderno didático e (*), obtemos:

$$G(0) = \int_{-5}^0 g(t) dt = \int_{-5}^{-3} g(t) dt + \int_{-3}^0 g(t) dt = -A_1 + A_2 = -3 + 6 = 3.$$

Portanto

$$\boxed{G(0) = 3}$$

Cálculo de $G(1)$:

$$G(1) = \int_{-5}^1 g(t) dt = \int_{-5}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt = G(0) + A_3 = 3 + 1 = 4.$$

Portanto

$$\boxed{G(1) = 4}$$

Cálculo de $G(3)$: procedendo como antes,

$$G(3) = \int_{-5}^3 g(t) dt = \int_{-5}^1 g(t) dt + \int_1^3 g(t) dt = G(1) + (-A_4) = 4 - 7 = -3$$

Portanto

$$\boxed{G(3) = -3}$$

Cálculo de $G(4)$:

$$G(4) = \int_{-5}^4 g(t) dt = \int_{-5}^3 g(t) dt + \int_3^4 g(t) dt = G(3) + (-A_5) = -3 - 2 = -5$$

Portanto

$$\boxed{G(4) = -5}$$

Cálculo de $G(7)$:

$$G(7) = \int_{-5}^7 g(t) dt = \int_{-5}^4 g(t) dt + \int_4^7 g(t) dt = G(4) + (-A_6) = -5 - 1 = -6$$

Portanto

$$\boxed{G(7) = -6}$$

Cálculo de $G(13)$:

$$G(13) = \int_{-5}^{13} g(t) dt = \int_{-5}^7 g(t) dt + \int_7^{13} g(t) dt = G(7) + A_7 = -6 + 15 = 9$$

Portanto

$$\boxed{G(13) = 9}$$

(b) Pela primeira forma do T.F.C., segue que $G'(x) = g(x)$, para todo $x \in (-5, 13)$.

De acordo com o gráfico, tem-se $g(x) < 0$ nos intervalos $(-5, -3)$, $(1, 4)$ e $(4, 7)$ e $g(x) > 0$, nos intervalos $(-3, 1)$ e $(7, 13)$.

A tabela abaixo apresenta o comportamento do sinal de $G'(x) = g(x)$ e portanto dá a informação sobre crescimento e decrescimento de $G(x)$

Intervalos	$-5 < x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 4$	$4 < x < 7$	$7 < x < 13$
$G'(x) = g(x)$	-	+	-	-	+
$G(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Assim, a função $G(x)$ é decrescente em $[-5, -3] \cup [1, 7]$ e é crescente em $[-3, 1] \cup [7, 13]$.

(c) Pelo item anterior e o teste da derivada primeira, temos que $x = -3$ e $x = 7$ são pontos de mínimo locais e $x = 1$ é ponto de máximo local.

Por outro lado, de (b) segue que G é contínua no intervalo fechado $[-5, 13]$. Logo, comparando os valores obtidos no item (a), segue que $x = 13$ é o ponto de máximo absoluto e $x = 7$ é ponto de mínimo absoluto.

(d)

Para estudarmos os pontos de inflexão e as mudanças de concavidade no gráfico de $G(x)$, devemos estudar o sinal de $G''(x)$.

Como $G'(x) = g(x)$ e g é derivável no intervalo $(-5, 13)$, segue que $G''(x) = g'(x)$.

Lembre-se que $g'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto

$P(x, g(x))$ que, neste caso, é negativa nos intervalos em que g é decrescente (vide figura 1.2), e positiva nos intervalos em que g é crescente (vide figura 1.3).

Assim, a tabela seguinte nos dá o comportamento do sinal de $G''(x)$.

Intervalos	$-5 < x < -4$	$-4 < x < -1$	$-1 < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 5$	$5 < x < 10$	$10 < x < 13$
$g''(x) = f'(x)$	-	+	-	+	-	+	-
Concavidade do gráfico de g	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

A tabela anterior nos diz que existe mudança de concavidade em $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$ e $x = 10$ e existe reta tangente nos pontos $(-4, G(-4))$, $(-1, G(-1))$, $(2, G(2))$, $(4, G(4))$, $(5, G(5))$ e $(10, G(10))$, logo todos os pontos mencionados são pontos de inflexão e portanto as abscissas dos pontos de inflexão ocorrem em $x = -4$, $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$, $x = 5$ e $x = 10$.

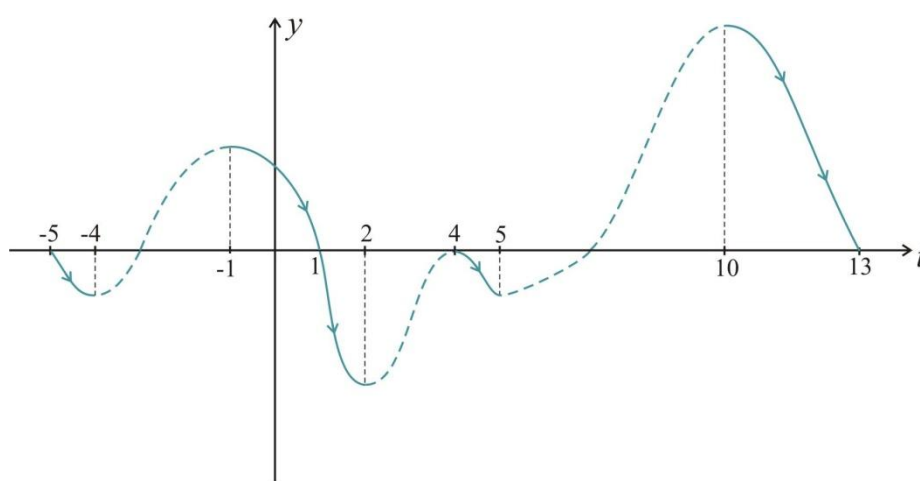


Figura 1.2

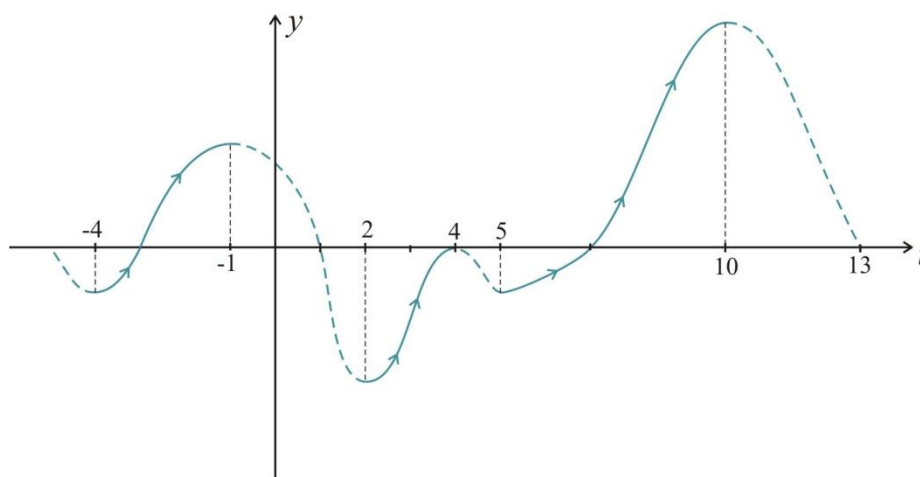


Figura 1.3

- (e) A tabela acima nos disse que o gráfico de G tem concavidade para baixo em $(-5, -4) \cup (-1, 2) \cup (4, 5) \cup (10, 13)$ e para cima em $(-4, -1) \cup (2, 4) \cup (5, 10)$.
- (f) Juntando os dados dos itens anteriores, podemos dar um esboço aproximado do gráfico da função G . O esboço do gráfico é dado na figura 1.4 a seguir:

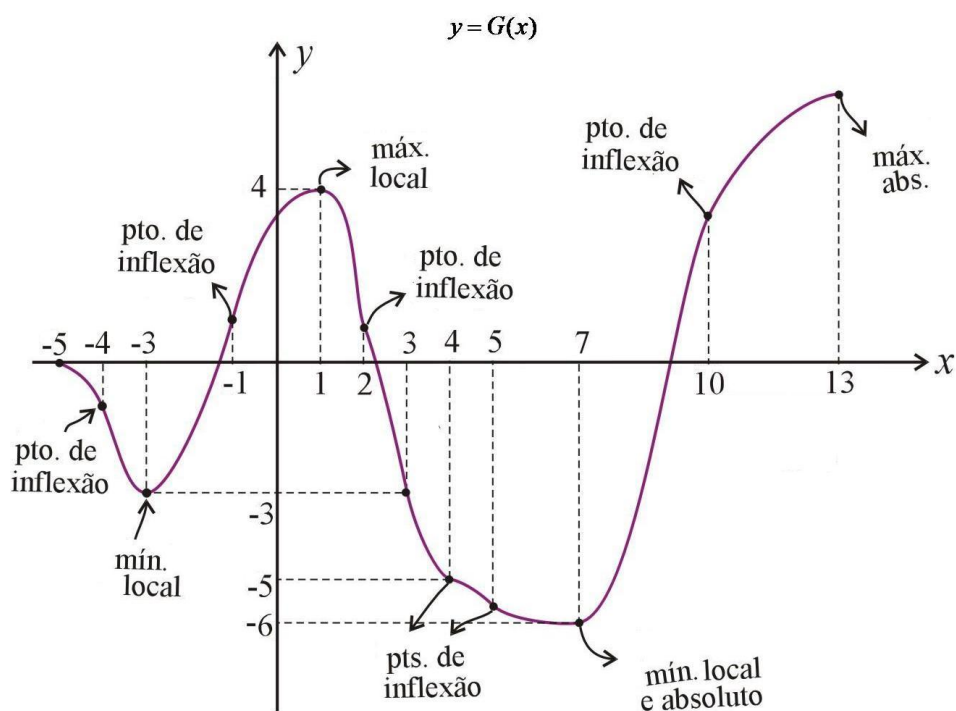


Figura 1.4

Observe que não nos é dada a expressão que define a função g . A única informação que nos é dada no enunciado são os valores das áreas $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ e A_7 , o que nos permitiu calcular apenas alguns dos valores de $G(x)$ dados no item (a). Por exemplo, não sabemos se $G(-1)$, $G(2)$ e $G(10)$ são de fato positivos como indicados na figura 1.4. Entretanto o esboço dado na figura é uma aproximação para o gráfico da função $G(x)$ respeitando as informações de crescimento e concavidade que o gráfico real deve possuir.

Solução da 2ª Questão

Considere a figura abaixo, representando o mesmo gráfico dado no enunciado

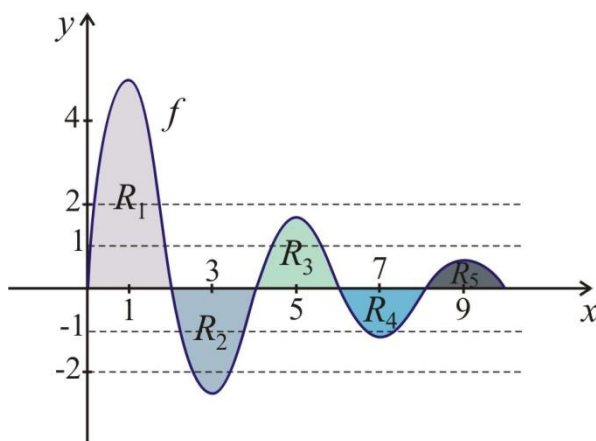


Figura 2.1

Denotando por

$$A_1 = \text{área}(R_1), A_2 = \text{área}(R_2), A_3 = \text{área}(R_3), A_4 = \text{área}(R_4) \text{ e } A_5 = \text{área}(R_5).$$

A figura naturalmente nos dá que:

$$A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 > 0. \quad (*)$$

(a) Por definição $\boxed{g(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0}$, como visto no caderno didático, uma vez que os extremos de integração são os mesmos, ambos iguais a zero e f esta definida em $x = 0$.

Pela definição 2.2 do caderno didático, tem-se:

$$A_1 = \int_0^2 f(t) dt, A_2 = -\int_2^4 f(t) dt, A_3 = \int_4^6 f(t) dt, A_4 = -\int_6^8 f(t) dt \text{ e } A_5 = \int_8^{10} f(t) dt.$$

Estimativa para $g(2)$:

Por definição: $g(2) = \int_0^2 f(t) dt = A_1 > 0 = g(0)$, isto é, $\boxed{g(2) > g(0) = 0}$

Estimativa para $g(4)$:

Novamente, usando a definição, a proposição 2.2 do caderno didático e (*), obtemos:

$$g(4) = \int_0^4 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt = A_1 + (-A_2) = A_1 - A_2 > 0 = g(0). \quad (*)$$

Por outro lado, $A_1 - A_2 > 0$ $A_1 = g(2)$. Portanto

$$\boxed{g(2) > g(4) > g(0) = 0} \quad (1)$$

Estimativa para $g(6)$:

$$g(6) = \int_0^6 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt = A_1 + (-A_2) + A_3 = A_1 - A_2 + A_3.$$

Agora, por um lado, tem-se

$$g(6) = \underbrace{(A_1 - A_2)}_{g(4)} + A_3 > g(4).$$

Por outro lado, podemos reescrever a expressão e obter:

$$g(6) = \underbrace{A_1}_{g(2)} - \underbrace{(A_2 - A_3)}_{>0} < g(2).$$

Assim segue de (1) que vale:

$$\boxed{g(2) > g(6) > g(4) > g(0) = 0} \quad (2)$$

Estimativa para $g(8)$: procedendo como antes,

$$g(8) = \int_0^8 f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt + \int_6^8 f(t) dt = A_1 + (-A_2) + A_3 + (-A_4) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Por um lado, reescrevendo a expressão, temos que

$$g(8) = \underbrace{(A_1 - A_2 + A_3)}_{g(6)} - \underbrace{A_4}_{>0} < g(6)$$

Por outro lado,

$$g(8) = \underbrace{(A_1 - A_2)}_{g(4)} + \underbrace{(A_3 - A_4)}_{>0} > g(4).$$

Assim, segue de (2) que

$$\boxed{g(2) > g(6) > g(8) > g(4) > g(0) = 0} \quad (3)$$

Estimativa para $g(10)$:

$$g(10) = \int_0^{10} f(t) dt = \int_0^2 f(t) dt + \int_2^4 f(t) dt + \int_4^6 f(t) dt + \int_6^8 f(t) dt + \int_8^{10} f(t) dt = A_1 + (-A_2) + A_3 + (-A_4) + A_5 = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5$$

Por um lado

$$g(10) = \underbrace{(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)}_{g(8)} + \underbrace{A_5}_{>0} > g(8),$$

por outro,

$$g(10) = \underbrace{(A_1 - A_2 + A_3)}_{g(6)} - \underbrace{(A_4 - A_5)}_{>0} < g(6).$$

Assim, segue de (3) que

$$\boxed{g(2) > g(6) > g(10) > g(8) > g(4) > g(0) = 0} \quad (4)$$

(b) Pela primeira forma do T.F.C., segue que $g'(x) = f(x)$, para todo $x \in [0, 10]$.

De acordo com o gráfico, tem-se $f(x) > 0$ nos intervalos $(0, 2)$, $(4, 5)$ e $(8, 10)$ e $f(x) < 0$, nos intervalos $(2, 4)$ e $(6, 8)$.

A tabela abaixo apresenta o comportamento do sinal de $g'(x) = f(x)$ e portanto dá a informação sobre crescimento e decrescimento de $g(x)$

Intervalos	$0 < x < 2$	$2 < x < 4$	$4 < x < 6$	$6 < x < 8$	$8 < x < 10$
$g'(x) = f(x)$	+	-	+	-	+
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Assim, a função $g(x)$ é crescente em $(0, 2) \cup (4, 6) \cup (8, 10)$ e é decrescente em $(2, 4) \cup (6, 8)$

(c) Pelo item anterior e o teste da derivada primeira, temos que $x = 2$ e $x = 6$ são pontos de máximo locais e $x = 4$ e $x = 8$ são pontos de mínimo locais. Por outro lado, de (b) segue que g é contínua no intervalo fechado $[0, 10]$. Logo segue ainda de (4), no item (a), que $x = 2$ é o ponto de máximo absoluto e $x = 0$ é o ponto de mínimo absoluto.

(d)

Para estudarmos os pontos de inflexão e as mudanças de concavidade no gráfico de $g(x)$, devemos estudar o sinal de $g''(x)$.

Como $g'(x) = f(x)$ e f é derivável no intervalo $(0, 9)$, segue que $g''(x) = f'(x)$.

Lembre-se que $f'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(x, f(x))$ que, neste caso, é positiva nos intervalos em que f é crescente (vide figura 2.2), e negativa nos intervalos em que f é decrescente (vide figura 2.3).

Assim, a tabela seguinte nos dá o comportamento do sinal de $g''(x)$.

Intervalos	$0 < x < 1$	$1 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < 7$	$7 < x < 9$	$9 < x < 10$
$g''(x) = f'(x)$	+	-	+	-	+	-
Concavidade do gráfico de g	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

A tabela acima nos diz que existe mudança de concavidade em $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ e $x = 9$ e existe reta tangente nos pontos $(1, g(1))$, $(3, g(3))$, $(5, g(5))$, $(7, g(7))$, $(9, g(9))$ logo os pontos mencionados são pontos de inflexão e portanto as abscissas dos pontos de inflexão ocorrem em $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$, $x = 7$ e $x = 9$.

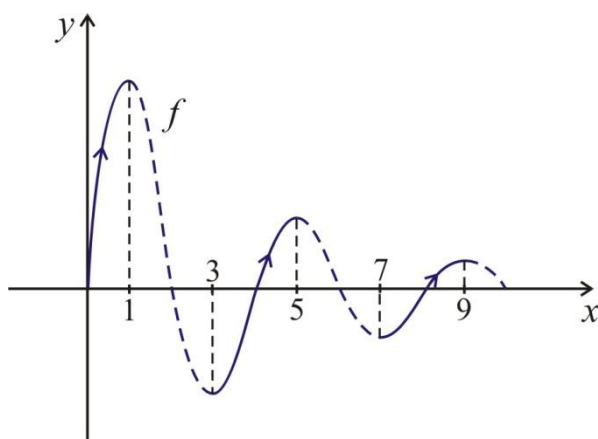


Figura 2.2

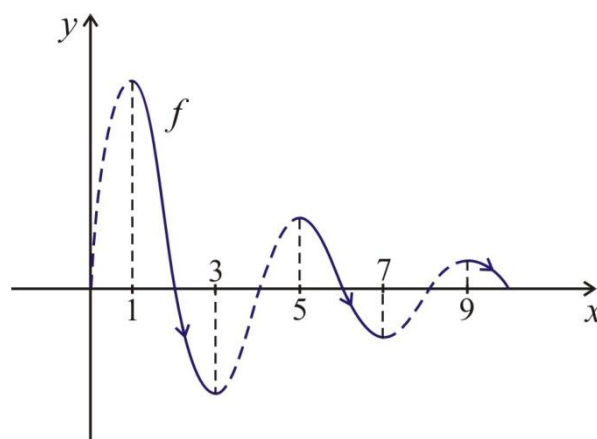


Figura 2.3

- (e) A tabela acima nos disse que o gráfico de g tem concavidade para cima em $(0,1) \cup (3,5) \cup (7,9)$ e para baixo em $(1,3) \cup (5,7) \cup (9,10)$.
- (f) Juntando os dados dos itens anteriores, podemos dar um esboço aproximado do gráfico da função g . O esboço do gráfico é dado na figura 2.4 a seguir:

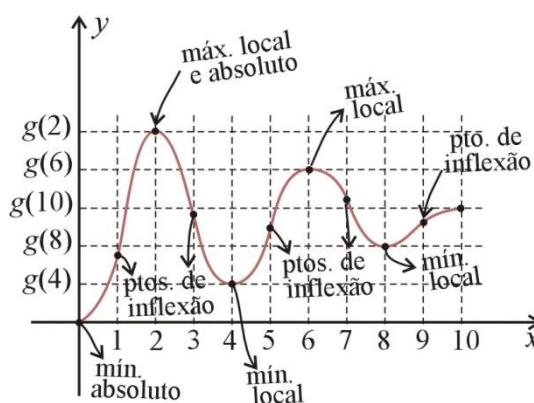


Figura 2.4

Observe que não nos é dada a expressão que define a função f . A única informação que nos é dada no enunciado é que $A_1 > A_2 > A_3 > A_4 > A_5 > 0$, o que nos permitiu comparar apenas alguns dos valores de $g(x)$ dados no item (a).

Solução da 3ª Questão

- (a) O gráfico da função f é exibido na figura 3.1 a seguir

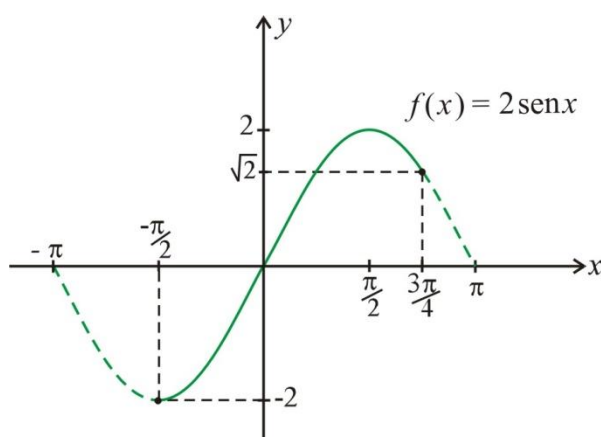


Figura 3.1

(b) A função $F(x) = -2 \cos x$ tem como derivada

$$F'(x) = 2 \operatorname{sen} x = f(x).$$

Portanto, pelo TFC, temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(-2 \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) - \left(-2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (-2 \cdot 0) = \sqrt{2}$$

Lembre que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx$ (*)

Como $f(x) < 0$, para $-\frac{\pi}{2} < x < 0$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = -(\text{área da região } R_1)$, vide figura 3.2.

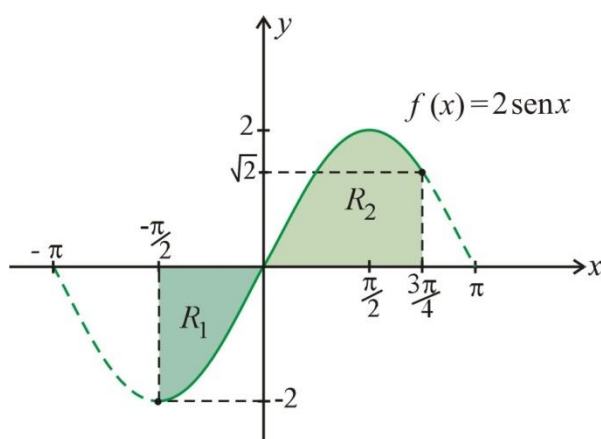


Figura 3.2

Já $f(x) > 0$, para $0 < x < \frac{3\pi}{4}$. Neste caso, $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = \text{área da região } R_2$.

Substituindo os valores anteriores em (*) temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx = -(\text{área da região } R_1) + \text{área da região } R_2.$$

Portanto, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x) dx$ representa a diferença entre a área da região R_2 e da região R_1 .

(c) A região procurada é a região R_1 da figura 3.2 anterior.

Como visto no item anterior, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = -(\text{área da região } R_1)$ (*)

$$\text{Mas, } \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x) dx = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-2 \cos 0) - (-2 \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)) = -2.1 - (-2.0) = -2.$$

Comparando com (*), segue que

$$\text{área da região } R_1 = 2.$$

Solução da 4ª Questão

(a) A expressão algébrica $x^2 = y^3$ pode ser reescrita como uma função de x na forma $y = x^{2/3}$ ou como função de y na forma $x = y^{3/2}$ e tem como gráfico a figura 4.1

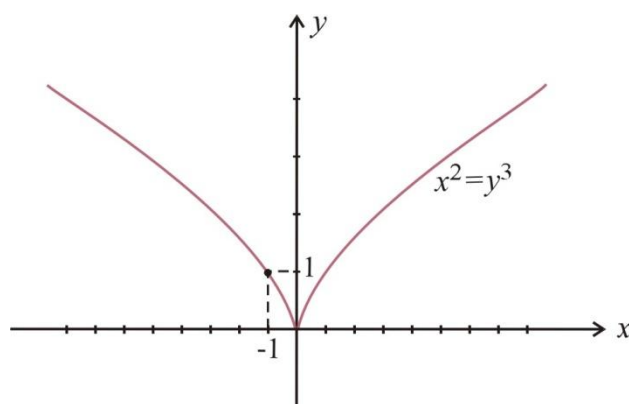


Figura 4.1

A expressão $x - 3y + 4 = 0$ pode ser escrita como função de x na forma $y = \frac{x+4}{3}$ ou como função de y como $x = 3y - 4$ e tem o gráfico mostrado na figura 4.2

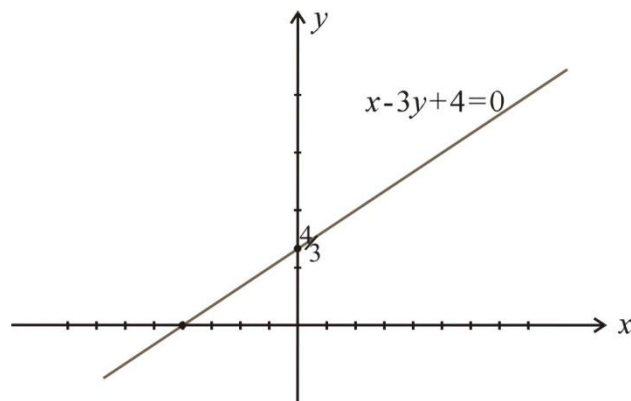


Figura 4.2

Sobrepondo os gráficos, obtemos a figura hachurada mostrada em 4.3

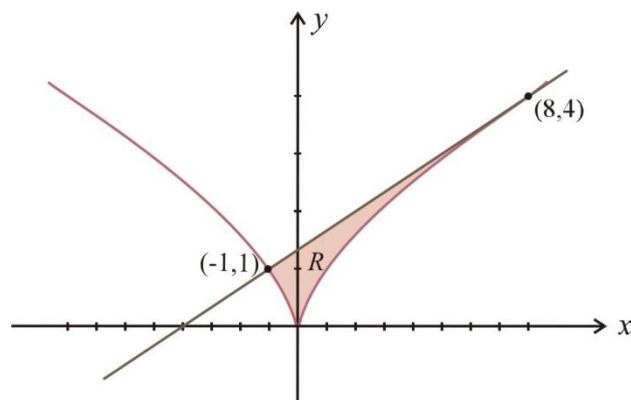


Figura 4.3

Para obter os pontos de interseção, precisamos resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 = y^3 \\ x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Verifica-se facilmente que $x = -1$ e $y = 1$ é uma solução.

Isolando y na segunda equação e elevando ao quadrado fica

$$x^2 = 9y^2 - 24y + 16.$$

Substituindo acima a primeira equação de (*) tem-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = 0 \quad (**)$$

Como já sabemos que $y = 1$ é solução de (**), dividimos o polinômio acima por $y - 1$ e obtém-se:

$$y^3 - 9y^2 + 24y - 16 = (y - 1)(y - 4)^2.$$

Portanto, $y = 4$ é a outra solução repetida do polinômio (**) e usando isso em (*) vemos que a abscissa correspondente é $x = 8$, como mostrado na figura 4.3.

(b) Como está visto na figura 4.3, para expressar a área como uma integral em termos de x , não é necessário fazer qualquer tipo de mudança.

Neste caso:

$$A(R) = \int_{-1}^8 \left(\frac{x+4}{3} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx$$

(c) Para representarmos a área em termos de uma integral com relação a y , devemos dividir a região da figura 4.3 em duas, como mostrado na figura 4.4

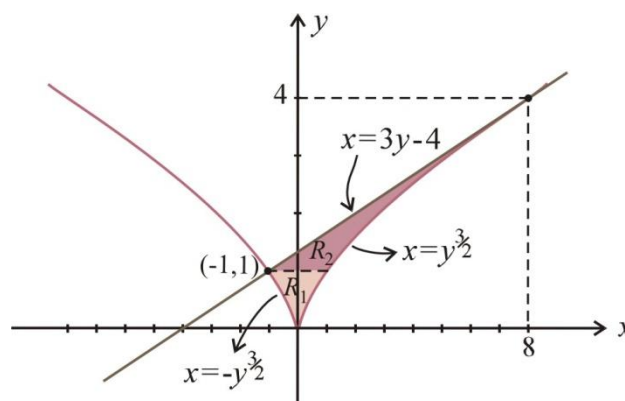


Figura 4.4

Neste caso:

$$A(R) = \underbrace{\int_0^1 \left(y^{\frac{3}{2}} - -y^{\frac{3}{2}} \right) dy}_{A(R_1)} + \underbrace{\int_1^4 \left(y^{\frac{3}{2}} - 3y - 4 \right) dy}_{A(R_2)}$$

(d) Usando a expressão mais simples obtida no item (b), tem-se:

$$A(R) = \int_{-1}^8 \left(\frac{x+4}{3} - x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \left(\frac{x^2}{6} - \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + \frac{4}{3} x \right) \Big|_{-1}^8 = \frac{27}{10}$$

Solução da 5ª Questão

- a) A figura 5.1 ilustra a região considerada, com a reta $x = a$ que deve dividir a região em duas partes iguais.

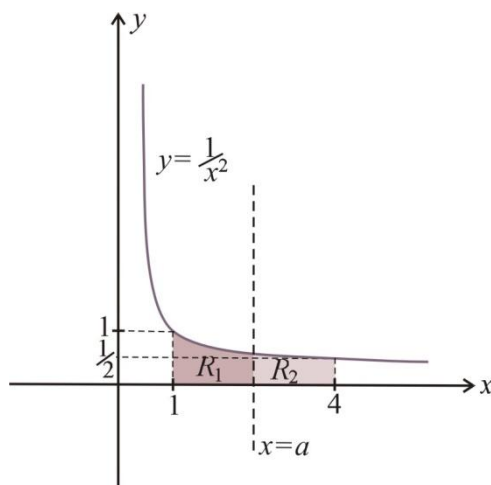


Figura 5.1

Denotando por $A_1 = \text{área}(R_1)$ e $A_2 = \text{área}(R_2)$, temos que $A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx$ e $A_2 = \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx$

Uma vez que $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, segue do TFC que

$$A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^a = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad A_2 = \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_a^4 = \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4}.$$

Como queremos $A_1 = A_2$, devemos ter $1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{5}}$

Obs.: note que a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ para $1 \leq x \leq 4$ é

$$A = A_1 + A_2 = \left(1 - \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

- b) As figuras 5.2 e 5.3 ilustram a região considerada, com a reta $y = b$ que deve dividir a região em duas partes iguais., em cada caso $b \leq \frac{1}{16}$ e $b \geq \frac{1}{16}$, respectivamente.

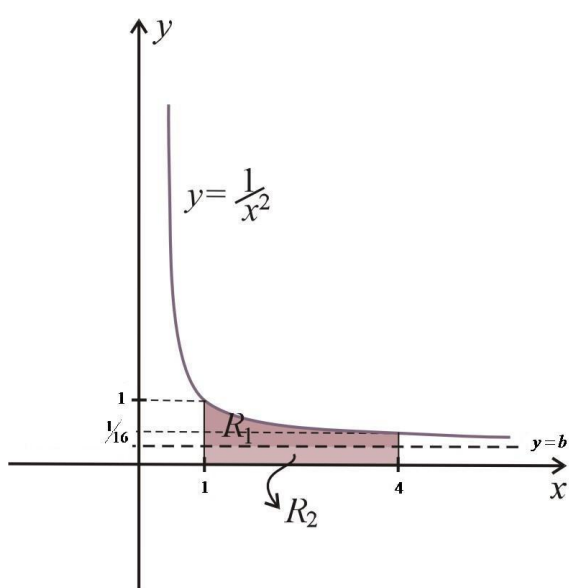


Figura 5.2

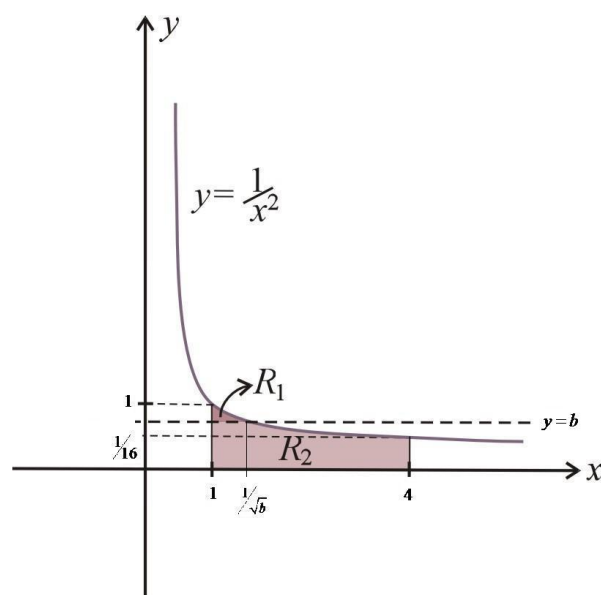


Figura 5.3

Notemos inicialmente que não pode ocorrer $b \leq \frac{1}{16}$:

Neste caso , a região R2 está contida no retângulo de base 4 e altura $\frac{1}{16}$.

Portanto $A_2 \leq 4 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$ (*)

Pelo item (a), a área total da região é $A = \frac{3}{4}$.

Como queremos $A_1 = A_2$, deveríamos ter $A_2 = \frac{1}{2} \cdot A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$, o que contradiz (*).

Portanto deve ser $b \geq \frac{1}{16}$.

Neste caso, como antes, basta calcular A_1 ou A_2 e igualar a $\frac{1}{2}A = \frac{3}{8}$ para obter o valor procurado de b

$$A_1 = \int_1^{1/\sqrt{b}} \frac{1}{x^2} dx - b \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1 \right) = \left(-\frac{1}{x} \right)_1^{1/\sqrt{b}} - b \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1 \right) = 1 - 2\sqrt{b} + b$$

$$A_2 = b \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1 \right) + \int_{1/\sqrt{b}}^4 \frac{1}{x^2} dx = b \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{b}} - 1 \right) + \left(-\frac{1}{x} \right)_{1/\sqrt{b}}^4 = \sqrt{b} - b + \sqrt{b} - \frac{1}{4} = 2\sqrt{b} - b - \frac{1}{4}$$

Igualando qualquer um deles (digamos A_1) a $\frac{3}{8}$, fica:

$$1 - 2\sqrt{b} + b = \frac{3}{8} \Rightarrow b - 2\sqrt{b} + \frac{5}{8} = 0 .$$

Fazendo $u = \sqrt{b} \Rightarrow u^2 = b$, a equação acima fica

$$u^2 - 2u + \frac{5}{8} = 0 \Rightarrow u = \frac{2 \pm \sqrt{4 - \frac{20}{8}}}{2} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{8}}$$

Como queremos $\frac{1}{16} < b < 1$, e temos que $b = u^2$, devemos ter $\frac{1}{4} < u < 1$. Logo deve ser $u = 1 - \sqrt{\frac{3}{8}}$.

$$b = u^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 = 1 + \frac{3}{8} - 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{8}} \Rightarrow \boxed{b = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{3}{2}}}.$$