Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

AP3- CÁLCULO II- 2011/2 Gabarito

1ª Questão (3,5 pontos) Considere a região R, do primeiro quadrante, limitada pelas retas $y=2,\ \ x=2$, e o gráfico de $y=x^2+2$.

(a) (0,5 ponto) Esboce R. A região é mostrada a seguir

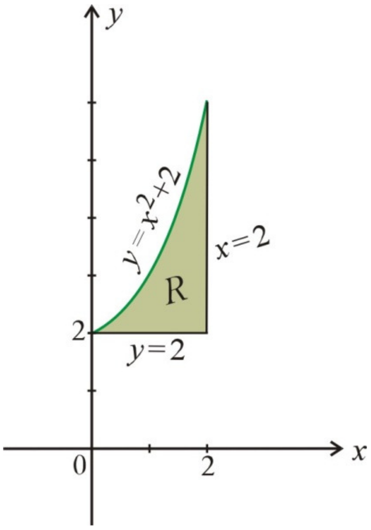

Figura 1

(b) Calcule a área de R.

$$A(R)=\int_0^2 [(x^2+2)-2]\,dx=\int_0^2 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big]_0^2=\frac{8}{3}$$ unidades de área.

(c) Expresse, **mas não calcule,** o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo Ox, usando o método:

(i) dos discos circulares

Neste caso o raio do disco típico ou arruela é perpendicular ao eixo x e a integração será feita em relação à x. O raio maior é $R(x)=x^2+2$ e $0\le x\le 2$. O raio menor é $r(x)=2$ e $0\le x\le 2$. Na Figura 2, mostramos a região, o eixo de rotação e os raios indicados.

A fórmula a ser utilizada é $V=\pi\int_a^b \left[(R(x))^2-(r(x))^2\right]dx$. Assim

$$V=\pi\int_0^2 \left[(x^2+2)^2-(2)^2\right]dx.$$

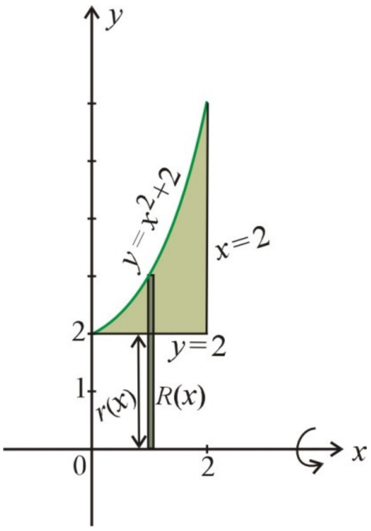

Figura 2

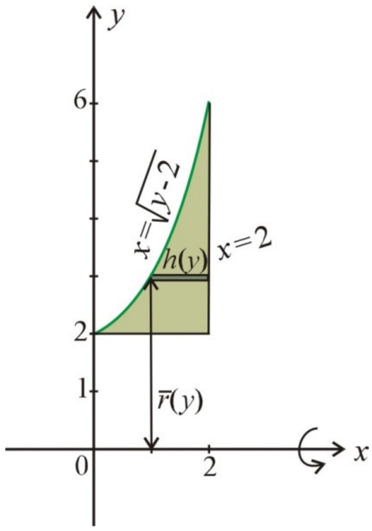

Figura 3

(ii) das cascas cilíndricas

Note que a região dada pode ser expressa como $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \setminus\ 2\le y\le 6,\quad \sqrt{y-2}\le x\le 2\}$

Desenhamos a Figura 3 mostrando a região R e o eixo de rotação (o eixo x). Identificamos na região R a função altura da casca típica $h(y)$ e o raio médio da casca típica $\overline{r}(y)$ onde $h(y)=2-\sqrt{y-2}$ e $\overline{r}(y)=y$ para $2\le y\le 6$. O volume é dado pela fórmula $V=2\pi\int_c^d \overline{r}(y)\,h(y)\ dy$. Assim, o volume é dado por $V=2\pi\int_2^6 y\,(2-\sqrt{y-2}\ )\,dy$.

2ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

(a) (1,5 ponto) $\int_0^{+\infty} x\ \ e^{-x}dx$ **(b)** (1,5 ponto) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4 x\,dx$

Solução

(a) $\int_0^{+\infty} x\ \ e^{-x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_0^t x\ \ e^{-x}dx$

Para calcular $\int_0^t x\ \ e^{-x}dx$ usaremos a fórmula de integração por partes para integrais definidas $\int_a^b u\,dv=uv\Big]_a^b-\int_a^b v\,du$

Faça $\begin{cases} u=x \\ dv=e^{-x}\,dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} du=dx \\ v=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}\end{cases}$

$\int_0^t x\,e^{-x}dx=-\,xe^{-x}\Big]_0^t-\int_0^t -e^{-x}dx=-te^{-t}-e^{-t}+1$

Logo $\int_0^{+\infty} x\ e^{-x} dx = \lim_{t\to+\infty} (-te^{-t} - e^{-t} + 1)$

Por outro lado $\lim_{t\to\infty} e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$, analogamente $\lim_{t\to\infty} te^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} \overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0$

Portanto $\int_0^{+\infty} x\ e^{-x} dx = 1$.

(b) Vamos calcular a integral indefinida

$$\int \mathrm{tg}^4 x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x\, \mathrm{tg}^2 x\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x (\sec^2 x - 1)\, dx = \int \mathrm{tg}^2 x \sec^2 x\, dx - \int \mathrm{tg}^2 x\, dx$$

$$\overset{\substack{u=\mathrm{tg}\,x \\ du=\sec^2 x}}{=} \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\ x + x + C$$

Logo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^4 x\, dx = \left.\frac{\mathrm{tg}^3 x}{3} - \mathrm{tg}\ x + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\mathrm{tg}^3 \frac{\pi}{4} - \mathrm{tg}\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}\right).$$

3ª Questão (1,0 ponto) Usando **apenas** critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria: $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$.

Solução. Observe que a integral dada é uma integral imprópria sobre o intervalo ilimitado $[2, +\infty)$.

Podemos usar o critério do limite do quociente. Note que para $x \in [2, +\infty)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} > 0$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{x^{2/3}} > 0$. Por outro lado

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x(x-1)}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 1 \in (0, +\infty)$. Então as integrais impróprias $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ e $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado, sabemos *do primeiro exemplo referencial da semana 11 do caderno da coordenação [ou também pelo exemplo 27.2 do modulo 2]*, que "$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx$ **com** $a > 0$ **converge se** $r > 1$ **e diverge se** $r \le 1$**.**"Assim, neste caso $a = 2 > 0$ e $r = 2/3 < 1$, logo $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$ diverge. Portanto $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x(x-1)}}$ também diverge.

O aluno poderia observar também que para $x \in [2,+\infty)$, tem-se $x(x-1) < x^2 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)}} > \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ e usar o critério de comparação.

4ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,0 ponto) Calcule a solução geral da equação: $\dfrac{dy}{dx} + y\,x^2 = x^2$

(b) (1,5 ponto) Resolva o problema de valor inicial $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x^2(1+x)} \\ y(1) = -1 \end{cases}$

Solução

(a) A equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} + y\,x^2 = x^2$ é linear, com $p(x) = x^2$ e $q(x) = x^2$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\displaystyle\int p(x)\,dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$.

Assim, o fator integrante é $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{x^3/3}$. Logo

$$\underbrace{e^{x^3/3}\frac{dy}{dx} + e^{x^3/3}x^2 y}_{\frac{d}{dx}\left(e^{x^3/3}y\right)} = e^{x^3/3}x^2 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^{x^3/3}y\right) = e^{x^3/3}x^2 \Rightarrow e^{x^3/3}y = \int e^{x^3/3}x^2\,dx + C$$

Isto é $e^{x^3/3}y = e^{x^3/3} + C \quad \Rightarrow \quad y = 1 + Ce^{-x^3/3}$ é a solução geral da equação diferencial dada.

(b) Dada a equação $y' = \dfrac{1}{x^2(1+x)}$ segue que $y = \displaystyle\int \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx$

Como o integrando é uma função racional utilizaremos o método de frações parciais:

$$\frac{1}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} = \frac{Ax(x+1) + B(1+x) + Cx^2}{x^2(1+x)}$$

Assim, igualando os numeradores, fica $1 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$, de onde $B = 1$. Como $A + B = 0 \Rightarrow A = -1$. Analogamente como $A + C = 0 \Rightarrow C = 1$.
Logo

$$y(x) = \int \frac{1}{x^2(1+x)}\,dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x}\right)dx = -\ln|x| + \frac{x^{-1}}{-1} + \ln|1+x| + C$$

Tendo em vista a condição inicial $y(1) = -1$, resulta que

$$y(1) = -\underbrace{\ln|1|}_{0} - \frac{1}{1} + \ln|1+1| + C = -1 + \ln 2 + C = -1 \quad \Rightarrow C = -\ln 2$$

Também da condição inicial, podemos afirmar que $x > 0$.

Portanto $y = -\ln x - \dfrac{1}{x} + \ln(1+x) - \ln 2 = \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right) - \dfrac{1}{x}$, onde $x > 0$ é a solução do PVI dado.