CEDERJ
Gabarito da Avaliação a Distância 2
Pré-Cálculo

1) [2,0 pontos] Sejam as funções:

$$h(x) = \sqrt{-x} \quad \text{e} \quad g(x) = \sqrt{2-x} \ .$$

a) Encontre os domínios e esboce os gráficos das funções h e g .

Justifique a construção dos gráficos. Se houver translação horizontal e/ou translação vertical de uma função mais simples, explique as transformações ocorridas identificando a função que sofreu tais transformações.

Determine as imagens dessas funções.

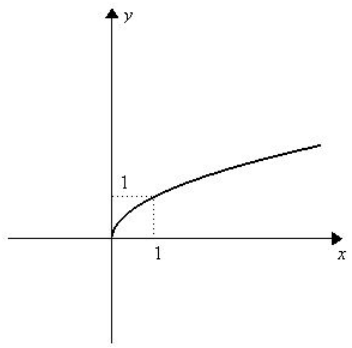
<u>Solução</u>:

Para que a raiz $\sqrt{-x}$ possa ser calculada é preciso que $-x \geq 0$.

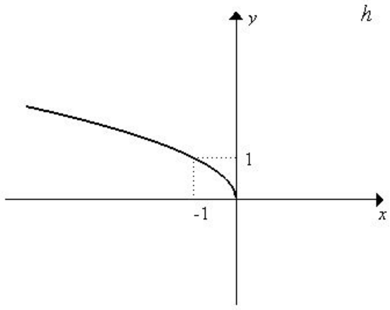
Mas, $-x \geq 0 \iff x \leq 0$. Portanto, $Dom(h) = (-\infty, 0]$.

O gráfico da função $h(x) = \sqrt{-x}$ é uma reflexão em torno do eixo O_y do gráfico da função $y = \sqrt{x}$,

$\mathrm{Im}(h) = [0, +\infty)$.



$y = \sqrt{x}$



$h(x) = \sqrt{-x}$

Para que a raiz $\sqrt{2-x}$ possa ser calculada é preciso que $2 - x \geq 0$.

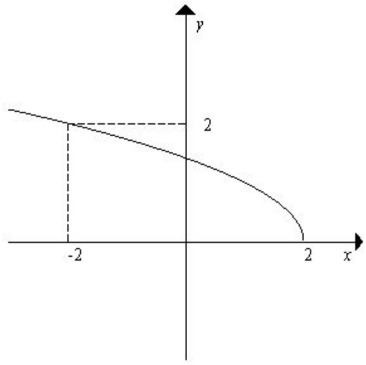
Mas, $2 - x \geq 0 \iff -x \geq -2 \iff x \leq 2$. Portanto, $Dom(g) = (-\infty, 2]$.

Note que,

$g(x) = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$.

Portanto, o gráfico de

$g(x) = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$ é uma translação horizontal para a direita, de 2 unidades, do gráfico da função $h(x) = \sqrt{-x}$.



$g(x) = \sqrt{2-x} = \sqrt{-(x-2)}$

---

b) Escreva a expressão de $y = (g \circ h)(x)$ e de $y = (g \circ g)(x)$. Determine os seus domínios.

Solução:

$y = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{-x}) = \sqrt{2 - \sqrt{-x}}$.

Esta expressão está definida quando $-x \geq 0$, isto é, quando $x \leq 0$ e quando $2 - \sqrt{-x} \geq 0$.

Vamos analisar a última desigualdade lembrando que $-x \geq 0$ e, portanto, $(\sqrt{-x})^2 = -x$

Assim, $2 - \sqrt{-x} \geq 0 \Rightarrow 2 \geq \sqrt{-x} \Rightarrow 4 \geq -x \Rightarrow x \geq -4$.

Portanto, o domínio de $y = (g \circ h)(x)$ é o intervalo fechado $[-4, 0]$.

$y = (g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{2-x}) = \sqrt{2 - \sqrt{2-x}}$.

Esta expressão está definida quando $2 - x \geq 0$, ou seja, quando $x \leq 2$ e quando $2 - \sqrt{2-x} \geq 0$.

Vamos analisar a última desigualdade:

$2 - \sqrt{2-x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2-x} \leq 2 \Rightarrow 2 - x \leq 4 \Rightarrow x \geq -2$.

Portanto, o domínio de $y = (g \circ g)(x)$ é o intervalo fechado $[-2, 2]$.

---

2) [1,5 pontos] Suponha dado o gráfico de uma função $y = f(x)$. Explique como obter, a partir do gráfico dado, os gráficos das funções a seguir:

a) $y = f(x) + \frac{1}{2}$ b) $y = f(x + \frac{1}{2})$ c) $y = f(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$ d) $y = 1 + 2f(x)$

e) $y = f(-x)$ f) $y = -\frac{1}{2}f(-x)$ g) $y = f^{-1}(x)$.

<u>Solução</u>:

a) $y = f(x) + \frac{1}{2}$: transladar o gráfico da função $y = f(x)$ verticalmente para cima, $\frac{1}{2}$ unidade.

---

b) $y = f(x + \frac{1}{2})$: transladar o gráfico da função $y = f(x)$ horizontalmente para esquerda, $\frac{1}{2}$ unidade.

---

c) $y = f(x - \frac{1}{2}) - \frac{1}{2}$: transladar o gráfico da função $y = f(x)$ horizontalmente para direita, $\frac{1}{2}$ unidade e depois, verticalmente para baixo, $\frac{1}{2}$ unidade.

---

d) $y = 1 + 2f(x)$: esticar o gráfico da função $y = f(x)$ verticalmente por um fator de 2 e depois transladar o gráfico encontrado, verticalmente para cima, 1 unidade.

---

e) $y = f(-x)$: refletir o gráfico da função $y = f(x)$ em torno do eixo O_y .

---

f) $y = -\frac{1}{2}f(-x)$: refletir o gráfico da função $y = f(x)$ em torno do eixo O_y , depois refletir o gráfico encontrado em torno do eixo O_x e a seguir, comprimir este gráfico verticalmente por um fator de 2 .

---

g) $y = f^{-1}(x)$: refletir o gráfico da função $y = f(x)$ em torno da reta bissetriz do 1º. e 3º. quadrantes, $y = x$.

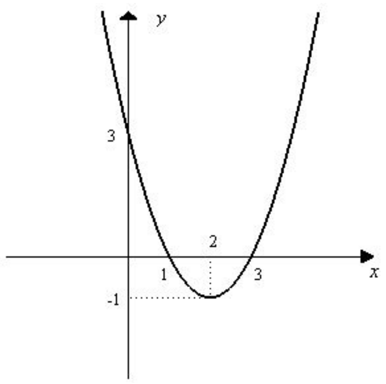
3) [2,0 pontos] Use a definição de módulo e esboce o gráfico da função $y = \left| x^2 - 4|x| + 3 \right|$. Justifique a construção desse gráfico.

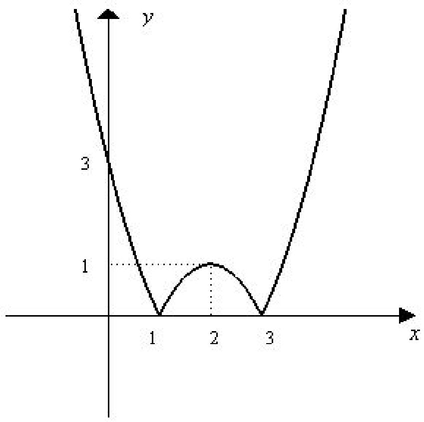
Solução:

I) Se $x \geq 0$ então $|x| = x$. Neste caso $y = \left| x^2 - 4|x| + 3 \right| = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$.

Vamos esboçar o gráfico da função $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$ e considerar desse gráfico os pontos com abscissa x , $x \geq 0$.

Para esboçar o gráfico da função $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$, vamos começar esboçando o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ e depois modular esse gráfico.

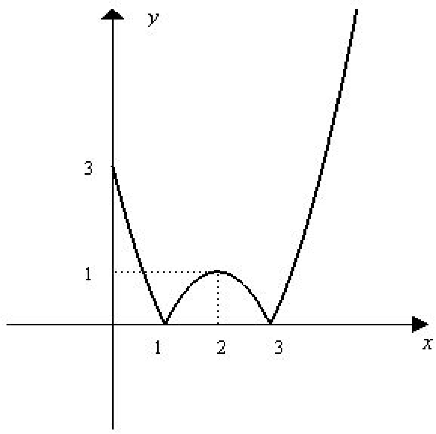




$y = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ $\qquad$ $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$

No caso I) só nos interessa os pontos do gráfico da função $y = \left| x^2 - 4x + 3 \right|$ com abscissa x , $x \geq 0$.

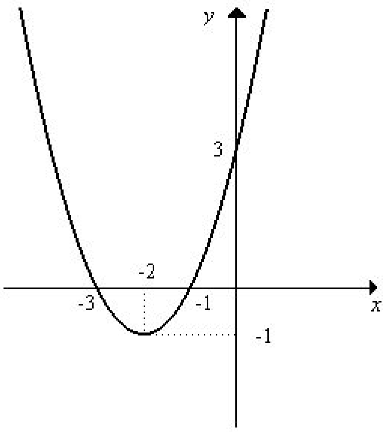
Portanto, o gráfico da parte I) é:



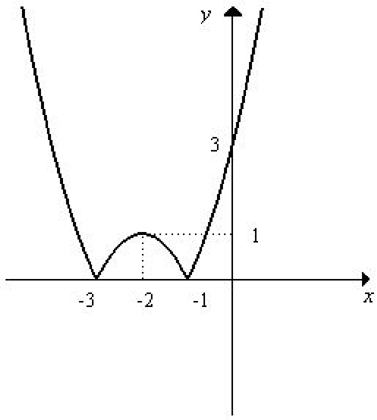
II) Se $x < 0$ então $|\,x\,| = -x$. Neste caso $y = \left|\, x^2 - 4|x| + 3 \right| = \left|\, x^2 + 4x + 3 \right|$.

Vamos esboçar o gráfico da função $y = \left|\, x^2 + 4x + 3 \right|$ e considerar desse gráfico os pontos com abscissa x , $x < 0$.

Para esboçar o gráfico da função $y = \left|\, x^2 + 4x + 3 \right|$, vamos começar esboçando o gráfico da função $y = x^2 + 4x + 3 = (x+1)\,(x+3)$ e depois modular esse gráfico.



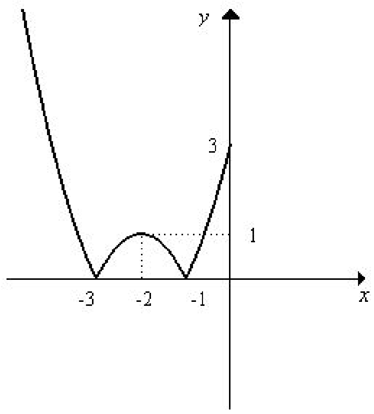
$y = x^2 + 4x + 3 = (x+1)\,(x+3)$



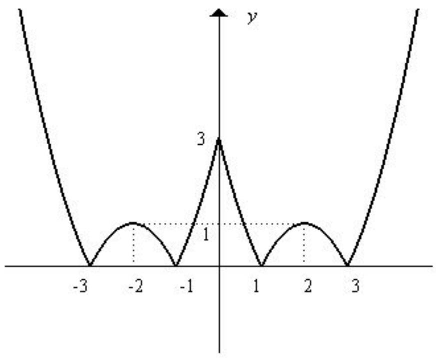
$y = \left|\, x^2 + 4x + 3 \right|$

No caso II) só nos interessa os pontos do gráfico da função $y = \left|\, x^2 + 4x + 3 \right|$ com abscissa x , $x < 0$.

Portanto, o gráfico da parte II) é:



Assim, o gráfico da função proposta na questão, $y = \left|\, x^2 - 4|x| + 3 \right|$, é:



4) [2,0 pontos] Seja a função:

$$f(x)=\sqrt{|x-1|}-1$$

a) Encontre o domínio da função $y = f(x)$.

Solução:

Como $|x-1| \geq 0$, para $\forall x$, $x \in \mathrm{IR}$, então $Dom(f) = \mathrm{IR}$.

----

b) Encontre, analiticamente,os pontos de interseção do gráfico com o eixo-O_x .

Para encontrar os pontos de interseção da função $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1$ com o eixo-O_x, devemos fazer $y = 0$.

Então,

$\sqrt{|x-1|}-1 = 0 \Rightarrow \sqrt{|x-1|} = 1 \Rightarrow |x-1| = 1 \Rightarrow x-1=1 \quad ou \quad x-1=-1 \Rightarrow$

$x = 2 \quad ou \quad x = 0$.

Veremos que esses valores serão confirmados no gráfico do item d).

----

c) Encontre, analiticamente, os valores de x no domínio da função $y = f(x)$ para os quais o gráfico da função encontra-se acima da reta $y = 1$.

Para encontrar os valores de x no domínio da função $y = f(x)$ para os quais o gráfico da função encontra-se acima da reta $y = 1$, devemos resolver a inequação $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1 > 1$.

Mas, $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1 > 1 \Rightarrow \sqrt{|x-1|} > 2 \Rightarrow |x-1| > 4 \Rightarrow$

$x-1 < -4 \quad ou \quad x-1 > 4 \Rightarrow x < -3 \quad ou \quad x > 5$.

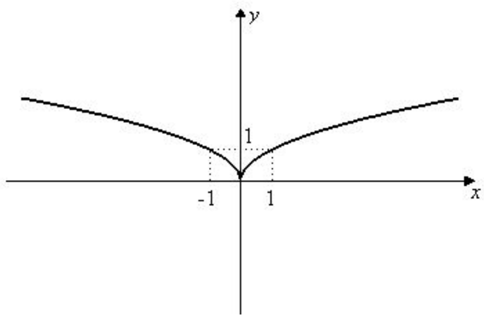
Poderemos observar essa informação no gráfico do item d).

----

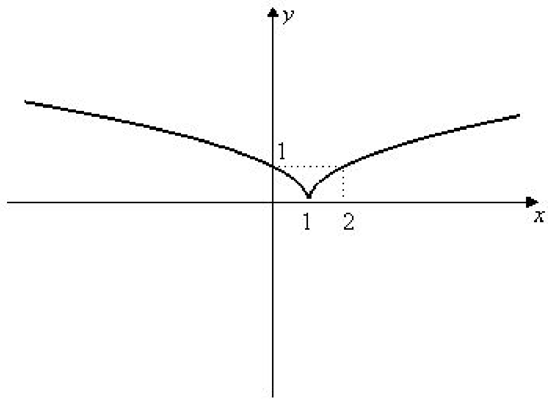
d) Esboce o gráfico da função $y = f(x)$. Justifique a construção desse gráfico.

Solução:

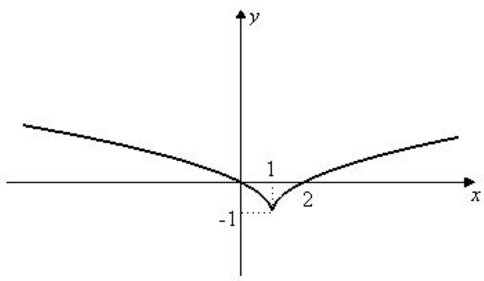
Começamos com o gráfico da função



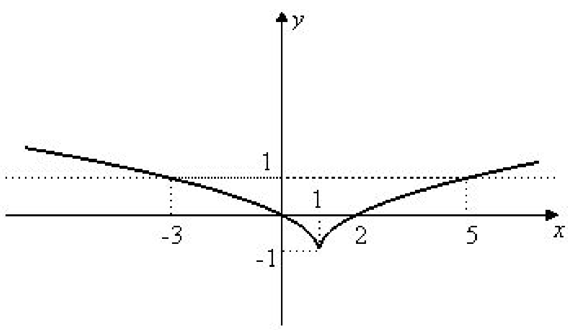
$y=\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & , \ x \geq 0 \\ \sqrt{-x} & , \ x < 0 \end{cases}$, que é mais elementar.



Transladamos esse gráfico para a direita, 1 unidade, e obtemos o gráfico da função $y=\sqrt{|x-1|}$.



A seguir, transladamos esse último gráfico verticalmente para baixo, 1 unidade e obtemos o gráfico da função proposta $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1$.



O gráfico da função $f(x)=\sqrt{|x-1|}-1$ com as informações encontradas nos itens b) e c):

5) [2,5 pontos]

a) Encontre o domínio da função $y = g(x) = \sqrt{3x - x^2}$ e esboce o seu gráfico. Justifique a construção desse gráfico.

Solução:

Para que a raiz $\sqrt{3x - x^2}$ possa ser calculada é preciso que $3x - x^2 \geq 0$.

Mas, $y = 3x - x^2 = x(3 - x)$ é uma parábola de raízes $x = 0$ e $x = 3$ e com concavidade voltada para baixo, pois o coeficiente de x^2 é negativo, portanto $3x - x^2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 3$.

Concluímos então que $Dom(g) = [0, 3]$.

Para esboçar o gráfico dessa função, vamos buscar a curva que dará origem a esse gráfico.

Partindo de $y = \sqrt{3x - x^2}$, elevamos ambos os lados ao quadrado e obtemos $y^2 = 3x - x^2$.

Mas,

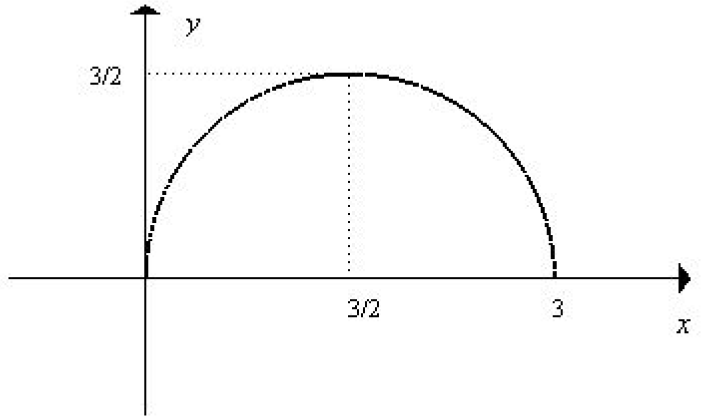
$y^2 = 3x - x^2 \quad \Rightarrow \quad y^2 + x^2 - 3x = 0$.

Completando o quadrado na variável x, obtemos $y^2 + x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = 0$.

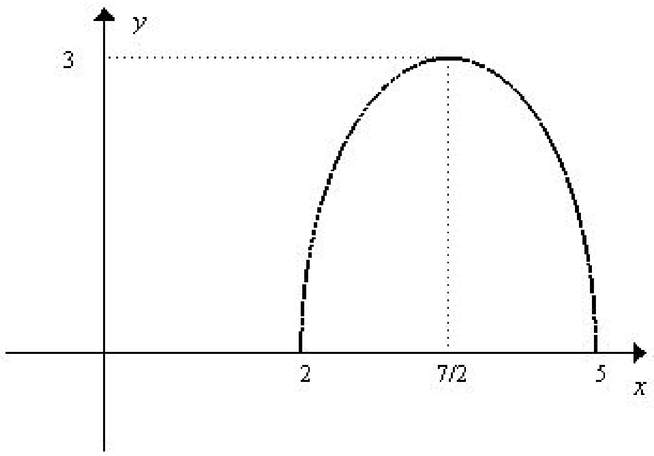
Donde, $y^2 + (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Esta é a equação de um círculo centrado no ponto $(\frac{3}{2}, 0)$ e raio $r = \frac{3}{2}$.

Como na função $y = g(x) = \sqrt{3x - x^2}$, $y \geq 0$, então o seu gráfico é a parte do círculo encontrado, com os pontos de ordenada y , $y \geq 0$.



b) Use transformações para criar uma lei para uma função $y = h(x)$, a partir da função $y = g(x)$ dada acima, cujo gráfico seja o gráfico dado abaixo:



Lembrando do que aprendemos sobre obter novas funções por deslocamentos, esticamentos e reflexão, observamos que para obter esse gráfico a partir do gráfico acima, da função $y = g(x) = \sqrt{3x - x^2}$, foi preciso transladar o gráfico dessa função 2 unidades para a direita e a seguir esticar esse gráfico verticalmente por um fator 2 .

A lei dessa nova função $y = h(x)$ é então:

$$y = h(x) = 2\sqrt{3(x-2) - (x-2)^2} = 2\sqrt{-x^2 + 7x - 10}$$