Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP3 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS – 15/12/2013 - SOLUÇÕES

Questão 1 [2,5 pontos]

Calcule a solução geral de

$$(2xy^3 - y)\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Solução:

A equação pode ser reescrita na forma $2x\,\dfrac{dy}{dx} = y - 2xy^3$, ou ainda

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2x}\,y = -y^3;$$

que reconhecemos como uma equação de Bernoulli.
Dividindo por $-y^3$:

$$-y^{-3}\,y' + \frac{1}{2x}y^{-2} = 1.$$

Fazendo a mudança de variáveis $u = y^{-2}$:

$$\frac{u'}{2} + \frac{1}{2x}u = 1.$$

Daí,

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int 1/x\,dx}\left(\int e^{\int 1/x\,dx}\,2\,dx + c\right) \\ &= x^{-1}\,(x^2 + c) \\ &= x + \frac{c}{x}. \end{aligned}$$

Como $y = 1/\sqrt{u}$, obtemos a família de soluções $y = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 + c}}$. $\blacksquare$

Questão 2 [2,5 pontos]

Determine um fator integrante da forma $x^a y^b$ para a equação

$$(-4x^2y - 2xy^2)\,dx + (2x^3 - 3xy)\,dy = 0. \tag{1}$$

Solução:

Multiplicando (1) por $\mu = x^a y^b$, obtemos

$$(-4x^{a+2}y^{b+1} - 2x^{a+1}y^{b+2})\, dx + (2x^{a+3}y^b - 3x^{a+1}y^{b+1})\, dy = 0. \tag{2}$$

(2) será exata se

$$-4(b+1)\, x^{a+2}y^b - 2\,(b+2)\, x^{a+1}y^{b+1} = 2\,(a+3)x^{a+2}y^b - 3\,(a+1)\, x^a y^{b+1}. \tag{3}$$

Igualando os coeficientes dos termos semelhantes de (3), obtemos

$$\begin{cases} -4(b+1) = 2(a+3) \\ -2(b+2) = 0 \\ -3(a+1) = 0. \end{cases}$$

Este sistema tem solução $a = -1$, $b = -2$, que nos dá o fator de integração

$$\mu(x, y) = x^{-1}y^{-2};$$

que é a resposta da questão. $\blacksquare$

Questão 3 [2,5 pontos]

Resolva o PVI

$$\overrightarrow{X}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}(t); \qquad \overrightarrow{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solução:

A equação dos autovalores da matriz do sistema é (verifique!) $\det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda + 2)^2 = 0$; que tem uma raiz dupla

$$\lambda = -2.$$

Um autovetor associado a $\lambda = -1$ é obtido resolvendo-se o sistema linear indefinido

$$\begin{cases} -3v_1 - 9v2 = 0 \\ v_1 + 3v_2 = 0. \end{cases}$$

Por exemplo

$$\overrightarrow{V} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix};$$

de onde obtemos a solução

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}.$$

Uma segunda solução é

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right] e^{-2t}$$

sendo $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, solução de

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Por exemplo $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Então uma solução geral para $\overrightarrow{X}(t)$ é

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 \, e^{-2t} + c_2 \, (3t-1) \, e^{-2t} \\ -c_1 \, e^{-2t} - c_2 \, t \; e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

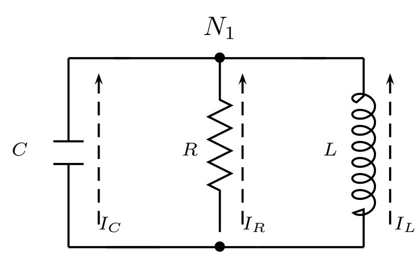
Impondo as condições iniciais, obtemos $c_1 = 1$ e $c_2 = 2$;

e então a solução do PVI é

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 1+6t \\ -(1+2\,t) \end{pmatrix} e^{-2t}. \qquad \blacksquare$$

Questão 4 [2,5 pontos]

Considere o circuito R-L-C em paralelo, da figura abaixo. Sejam I_C, I_R e I_L as correntes que passam no capacitor, resistor e indutor, respectivamente, no sentido "de baixo para cima"; e V_C, V_R, V_L as diferenças de potencial correspondentes. Utilizando as *Leis de Kirchhoff,* calcule um sistema de equações para I_L e V_C.



Sugestão: Aplique a lei das correntes ao nó N_1. Depois aplique a lei das voltagens separadamente às duas malhas do circuito.

Não esqueça das relações entre correntes e voltagens em cada elemento do circuito.

Solução:

Aplicando a lei dos nós a N_1:

$$I_C + I_R + I_L = 0, \tag{4}$$

e a lei das malhas a cada uma das duas malhas do circuito,

$$V_C - V_R = 0 \tag{5}$$

$$V_R - V_L = 0 \tag{6}$$

Além disso, temos as seguintes relações (definidoras):

$$C\,\frac{dV_C}{dt} = I_C \tag{7}$$

$$V_R = R\,I_R \tag{8}$$

$$L\,\frac{d\,I_L}{dt} = V_L. \tag{9}$$

Eliminando $V_r,\ V_l,\ I_c$ e I_r, usando as igualdades de (4) a (9), obtemos

$$C\,\frac{dV_C}{dt} = I_C = -(I_R + I_L) = -I_L - \frac{V_R}{R} = -I_L - \frac{V_C}{R}, \tag{10}$$

$$L\,\frac{dI_L}{dt} = V_L = V_C, \tag{11}$$

Então, juntando (10) e (11):

$$\begin{cases} \dfrac{dI_L}{dt} = \dfrac{V_C}{L} \\ \dfrac{dV_C}{dt} = -\dfrac{I_L}{C} - \dfrac{V_C}{RC}; \end{cases}$$

que é um sistema de equações para I_L e V_C. ■