Respostas AD02 - 2/2010 - CÁLCULO I

QUESTÃO 01. $[3,0\,\text{pontos}]$

(a) $f'(x) = \dfrac{[\operatorname{sen} x + x\cos x]\,(x^2+1) - (x \operatorname{sen} x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{(1-x^2)\operatorname{sen} x + (x+x^3)\cos x}{(x^2+1)^2}$

(b) $f'(x) = 6x + 4\operatorname{sen}(2x^3+1)\,(6x^2) = 6x\,(1 + 4x\operatorname{sen}(2x^3+1))$

(c) $g'(x) = 2\,f(x) + (2x-1)\,f'(x) \;\Rightarrow\; g'(-1) = 2\,f(-1) + (2(-1)-1)\,f'(-1) = -4$

QUESTÃO 02. $[2,0\,\text{pontos}]$

Primeiramente, como $f(-2) = 1$, temos que:

$$(-2)^2 + \beta(1) - \alpha(-2)(1) = 1 \;\Rightarrow\; 2\alpha + \beta = -3. \tag{1}$$

Por outro lado, derivando implicitamente, obtemos:

$$2x + \beta\,\frac{dy}{dx} - \alpha y - \alpha x\,\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; (\beta - \alpha x)\,\frac{dy}{dx} = \alpha y - 2x.$$

Como $f'(-2) = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = -1$, segue que:

$$(\beta - \alpha(-2))(-1) = \alpha(1) - 2(-2) \;\Rightarrow\; -3\alpha - \beta = 4. \tag{2}$$

Das equações (1) e (2), obtemos $\alpha = \beta = -1$.

QUESTÃO 03. $[1,5\,\text{pontos}]$

Temos que $f'(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$, para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -1$. Logo,

(i) $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3$ ou $x = 1$;

(ii) $f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-3 > 0 \;\Leftrightarrow\; x < -3$ ou $x > 1$;

(iii) $f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; x^2+2x-3 < 0 \;\Leftrightarrow\; -3 < x < -1$ ou $-1 < x < 1$.

Portanto, a função f é crescente nos intervalos $(-\infty,-3)$ e $(1,+\infty)$ e é decrescente nos intervalos $(-3,-1)$ e $(-1,1)$.

QUESTÃO 04. $[1,5\,\text{pontos}]$

Temos que $f'(x) = 2x+6$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Daí,

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow 2x+6 = 0 \;\Leftrightarrow x = -3.$$

Logo, $x = -3$ é o único ponto crítico de f. Ainda,

$$f(-4) = -9,\; f(0) = -1 \text{ e } f(-3) = -10.$$

Portanto, f possui um máximo absoluto em $x = 0$ e um mínimo absoluto em $x = -3$.

QUESTÃO 05. $[2,0\,\text{pontos}]$