2010-2 – AD1 de Equações Diferenciais – Gabarito

Questão 1: [2,5 pontos]

a) Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}, \quad y(3) = 6.$$

b) Calcule a área do círculo de centro no ponto $(2,2)$ e raio $= 1$.

Soluções:

a) Por integração direta, a solução geral da equação é

$$y(x) = \int^x \frac{u}{\sqrt{u^2+16}}\, du = \sqrt{x^2+16} + c.$$

Impondo a condição inicial, calculamos imediatamente $c = 1$,

A solução do problema de valor inicial dado é $y(x) = \sqrt{x^2+16} + 1$.

b) Usando nossos conhecimentos de Geometria Analítica, obtemos

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

Tirando o valor de y em função de x, temos as funções

$$y = 2 \pm \sqrt{1-(x-2)^2}, \qquad 2 \leq x \leq 3$$

Como áreas são invariantes por translações, a área do círculo é (verifique!)

$$\begin{aligned} \text{Área} &= 4 \times \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2}\, dx \\ &= 4 \times \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2} \quad dx \\ &= 4 \times \int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2} \quad dx \end{aligned}$$

Para calcular a integral, podemos usar a mudança de variáveis

$$x - 2 = sen\ \theta \tag{1}$$

daí então

$$\begin{aligned} x &= 2 + sen\ \theta &(2)\\ dx &= cos\ \theta\ d\ \theta &(3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x = 2 &\implies sen\ \theta = 0 \quad (\text{i.é} \quad \theta = 0) &(4)\\ x = 3 &\implies sen\ \theta = 1 \quad (\text{i.é} \quad \theta = \pi/2) &(5) \end{aligned}$$

substituindo (2), (3), (4) e (5) na integral $\int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2} \quad dx$, obtemos

$$\int_2^3 \sqrt{1-(x-2)^2} \quad dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-sen^2\theta}\, cos\ \theta\ d\ \theta,$$

i.é,

$$\int_0^{\pi/2} cos^2\ \theta\ d\ \theta = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+cos\,2\theta}{2}\right)\ d\theta = 4\frac{\pi}{4} = \pi$$

Questão 2: [2,5 pontos]

a) Determine todas as soluções da equação*não-linear*

$$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y-1}\ .$$

I.é, obtenha uma fórmula, envolvendo um parâmetro arbitrário, para as soluções.

b) ATENÇÃO!! A equação possui uma solução da forma $y=$ constante. Calcule-a.
c) Além da solução constante, existem outras soluções, além das que são dadas pela fórmula do item (a)?
Solução:
a) Suponhamos que $y > 1$. Dividindo ambos os membros da equação por $\sqrt{y-1}$ obtemos a equação separada

$$\frac{dy}{\sqrt{y-1}} = 2x\,dx,$$

a qual, depois de integrada, fornece

$$y(x) = 1 + \left(\frac{x^2+c}{2}\right)^2 \tag{6}$$

b) Seja K tal que $y = K$ é solução. Então, substituindo $y = K$ na equação, obtemos $0 = 2x\sqrt{k-1}$. Portanto $K = 1$, e podemos constatar que $y(x) \equiv 1$ é - de fato - uma solução da equação. E repare que esta solução não é obtida da expressão (6) atribuindo um valor à constante c.
Então $y(x) \equiv 1$ é uma outra solução, que não pode ser deduzida da expressão da "solução geral" (6).

c) Mais ainda: para todo valor $c > 0$, a solução (6) satisfaz a condição $y(x) > 1$ para todo $x > 0$. Obviamente, quando $c = 0$, a expressão (6) nos dá $y(x) = 1 + x^2/4$. Observe que no ponto $x = 0$ não acontece $y(x) > 1$, que era nossa hiopótese inicial. Mesmo assim, a função $y(x) = 1 + x^2/4$ satisfaz a equação em todos os pontos (verifique!).

Moral da história: a fórmula da "solução geral" nem sempre permite obter todas as soluções da equação [1]

Questão 3 [2,5 pontos]

Calcule a solução geral de cada uma das equações abaixo:

1. $y' = y\ cotg\,x;\quad y > 0,\ 0 < x < \pi/2;$
2. $y' = -\dfrac{x+y}{x},\quad x > 0,\quad y > 0;$
3. $2xy\ y' + x = y^2\quad x > 0, y > 0;$
4. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y},\quad x+y > 1.$

Soluções:

[1] Este fato não acontece com as *equações diferenciais lineares*, conforme você poderá constatar posteriormente .

1) Temos

$$\begin{aligned} y' = y\ cotg\,x \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{cos\,x}{sen\,x} \\ &\Longleftrightarrow \quad ln\,y = ln\,x + k \\ &\Longleftrightarrow \quad ln\,y = ln\,cx \\ &\Longleftrightarrow \quad y = c\,x, \quad x \neq 0. \end{aligned}$$

2)

$$y' = -\frac{x+y}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = -\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)\right] \tag{7}$$

$$\Longleftrightarrow \quad v + xv' = -(1+v), \qquad (v = y/x) \tag{8}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1+2v}\,\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{x} \tag{9}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,ln(1+2v) = -ln\,x + k = ln(k/x) \tag{10}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{1 + 2\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{k}{x}. \tag{11}$$

A equação (11) define implicitamente as soluções da equação diferencial proposta.

3) Temos

$$2xy\ y' + x = y^2 \quad \Longleftrightarrow \quad y' + \frac{1}{2}y^{-1} = \frac{1}{2x}y \tag{12}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y' - \frac{1}{2x}\,y = -\frac{1}{2}\,y^{-1} \qquad \text{(Bernoulli)} \tag{13}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z' - \frac{1}{x}\,z = -1 \qquad (z = y^2) \tag{14}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = e^{-\int -(1/x)\,dx}\left[e^{\int -(1/x)\,dx}(-1)\ dx + c\right] \tag{15}$$

$$\Longleftrightarrow \quad z = x\left(\int \frac{1}{x}\ dx + c\right) = x\ ln\ + cx \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow \quad y = [x\ ln\,x + cx]^{1/2}. \tag{17}$$

4)

$$y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y} \quad \Longleftrightarrow \quad y' = \frac{1-3(x+y)}{1+(x+y)}$$

Fazendo a mudança $[u = x + y; \quad u' = 1 + y'; \quad y' = u' - 1]$

$$\Longleftrightarrow \quad u' - 1 = \frac{1-3u}{1+u} \tag{18}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u' = \frac{1-3u}{1+u} + 1 = \frac{2-2u}{1+u} \tag{19}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{2}{1-u} - 1\right)\frac{du}{dx} = 2 \tag{20}$$

$$\Longleftrightarrow \quad -u - 2\,ln\,(1-u) = 2x + c \tag{21}$$

$$\Longleftrightarrow \quad u + ln\,(1-u)^2 = -2x + c \tag{22}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (x+y) + ln\,(1-x-y)^2 + 2x = c. \tag{23}$$

Questão 4 [2,5 pontos]

a)Calcule a solução $p(t)$ do PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -r\ \dfrac{p}{v} \\ p(0) = p_0 \end{cases}$$

($r,\ v,$ e p_0 são constantes positivas).

b) Mostre que a solução $p(t)$ do item anterior tende a zero quando $t \to \infty$.

c) Mostre agora que a solução $p(t)$ do problema $\dfrac{dp}{dt} = k - r\ \dfrac{p}{v} \quad p(0) = p_0$ tende a vk/r quando $t \to \infty$.

($k, r,\ v,$ e p_0 são constantes positivas).

Soluções: a)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} = -r\ \frac{p}{v} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{dp}{p} = -\frac{r}{v}\, dt \\ &\Longleftrightarrow \quad ln\, p(t) = -\frac{r}{v}\, t + K \\ &\Longleftrightarrow \quad p(t) = k\, E^{-r/vt} \end{aligned}$$

Usando agora a condição inicial, temos

$$p(0) - p_0 \Longleftrightarrow k = p_0$$

e a solução do PVI é

$$p(t) = p_0\, e^{-r/vt}.$$

b) A partir da solucão do item (a), calculamos

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \lim_{t\to\infty} p_0\, e^{-r/vt} = 0$$

c) Temos agora

$$\frac{dp}{dt} + \frac{r}{v}\, p = k,$$

que é uma equação diferencial linear de primeira ordem não-homogênea.

$$\frac{dp}{dt} + \frac{r}{v}\, p = k \quad \Longleftrightarrow \quad p(t) = c\, e^{-r/vt} + \frac{kv}{r}$$

Daí

$$\lim_{t\to\infty} p(t) = \frac{kv}{r}.$$