

AP3- CÁLCULO II- 2009/1 Gabarito

1ª Questão (2,5 pontos). Seja $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq e^x\}$

a) (1,0 ponto) Calcule a área de R .

b) (1,5 ponto) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Oy .

Solução

a) Área (R) = $\int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e = e(e-1)$ unidades de área.

b) Desenhemos a Figura 1, mostrando a região e o eixo de rotação (eixo Oy). Identificamos a função altura da casca típica $h(x)$ e o raio médio da casca típica $\bar{r}$, onde $h(x) = e^x$ e $\bar{r} = x$ para $1 \leq x \leq 2$.

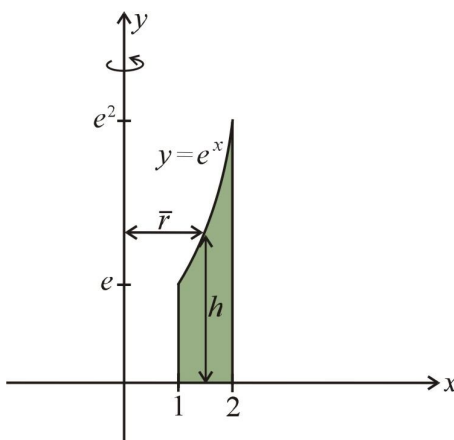


Figura 1

O volume é dado pela fórmula $V = 2\pi \int_a^b \bar{r}(x) h(x) dx$. Assim, o volume é

$$V = 2\pi \int_1^2 x e^x dx$$

Usaremos integração por partes para resolver a integral.

$$\text{Faça } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \underbrace{x}_{\substack{u \\ \cancel{du}}} \underbrace{e^x dx}_{\substack{dv \\ \cancel{v}}} &= \left[\underbrace{x}_{\substack{u \\ \cancel{du}}} \cdot \underbrace{e^x}_{\substack{v \\ \cancel{dv}}} \right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\ &= (2e^2 - e) - e^x \Big|_1^2 = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2 \end{aligned}$$

Assim, $V = 2\pi e^2$ unidades de volume.

2ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 2}$

b) $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$

Solução

a) $\int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 2} = \int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)(x+2)} = \int_0^1 \left(\frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2} \right) dx$

$$\frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+2}. \quad (*)$$

$$1 = A(x+2) + B(2x+1) \quad (**)$$

Assim, se $x = -2$ em $(**)$ obtemos:

$$1 = 0 + B(2(-2) + 1) \Rightarrow 1 = -3B \Rightarrow B = -\frac{1}{3}$$

Também, se $x = -\frac{1}{2}$ em $(**)$ tem-se:

$$1 = A\left(-\frac{1}{2} + 2\right) \Rightarrow 1 = \frac{3}{2}A \Rightarrow \frac{2}{3} = A$$

Substituindo os valores de A e B em $(*)$

$$\frac{1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{\frac{2}{3}}{2x+1} + \frac{-\frac{1}{3}}{x+2} = \frac{2}{3(2x+1)} - \frac{1}{3(x+2)}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{2x^2 + 5x + 2} &= \int_0^1 \frac{2dx}{3(2x+1)} - \int_0^1 \frac{1}{3(x+2)} dx = \frac{1}{3} \ln |2x+1| \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \ln |x+2| \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \ln |2| \end{aligned}$$

$$b) \int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \int \frac{dt}{(\sqrt{1+t^2})^3}$$

Primeiro note que nenhuma das regras básicas de integração é aplicável. Para usar uma substituição trigonométrica, observe que $\sqrt{1+t^2}$ é da forma $\sqrt{a^2+x^2}$ com $a=1$.

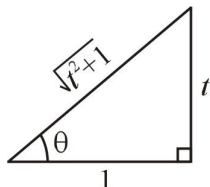


Figura 2

Fazendo a substituição trigonométrica $\begin{cases} t = \tan \theta \\ dt = \sec^2 \theta d\theta \end{cases}$, temos que $\sqrt{1+t^2} = \sec \theta$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} &= \int \frac{dt}{(\sqrt{1+t^2})^3} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^3 \theta} \\ &= \int \frac{1}{\sec \theta} d\theta = \int \cos \theta d\theta = \sin \theta + C \end{aligned}$$

Assim $\int \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + C.$

3ª Questão (2,5 pontos)

a) (1,5 ponto) Calcule a seguinte integral imprópria

$$\int_4^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

b) (1,0 ponto) Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty} \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{1+x^5}} dx$$

Solução

$$a) \int_4^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_4^t \frac{1}{x(\ln x)^3} dx$$

Fazendo a mudança de variável $\begin{cases} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{cases}$ temos que

$$\int \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \int \frac{1}{u^3} du = \int u^{-3} du = -\frac{1}{2u^2} + C = -\frac{1}{2(\ln x)^2} + C$$

$$\begin{aligned} \int_4^t \frac{1}{x(\ln x)^3} dx &= -\frac{1}{2(\ln x)^2} \Big|_4^t = -\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{2(\ln 4)^2} = -\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{2(\ln 2^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{8(\ln 2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_4^t \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2(\ln t)^2} + \frac{1}{8(\ln 2)^2} \right) = \frac{1}{8(\ln 2)^2}$$

$$\text{Isto é } \int_4^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^3} dx = \frac{1}{8(\ln 2)^2}.$$

$$\text{b) Note que } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{1+x^5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\sqrt{\frac{x^5}{1+x^5}} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left(\sqrt{\frac{1}{\frac{1}{x^5} + 1}} \right) = 2 \neq 0$$

Assim pela propriedade que diz, “Seja f contínua em $[a, +\infty)$. Se, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$, então

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge.}” \text{ Podemos então afirmar que } \int_1^{+\infty} \frac{2x^{5/2}}{\sqrt{1+x^5}} dx \text{ diverge.}$$

4ª Questão (2,0 pontos) A curva C definida pela equação $\alpha(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)$

- a) (1,0 ponto) Calcule o comprimento do traço da curva de C sobre o intervalo $t \in [0, \pi]$.
 b) (1,0 ponto) Determine uma parametrização $\gamma(\lambda)$ para a reta tangente à curva C no ponto $\alpha(\frac{\pi}{4})$.

Solução

- a) Sabemos que o comprimento de arco de uma curva C parametrizada por

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b, \text{ é dada por}$$

$$L = \int_a^b |\alpha'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

No nosso caso $a = 0$, $b = \pi$ e também $\alpha'(t) = (\sin t, 1 - \cos t)$.

$$\text{Logo } |\alpha'(t)| = \sqrt{(\sin t)^2 + (1 - \cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 1 - 2\cos t + \cos^2 t}$$

$$= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1 - 2\cos t} = \sqrt{1 + 1 - 2\cos t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$$

$$= \sqrt{2(1 - \cos t)} = \sqrt{4 \frac{(1 - \cos t)}{2}} = 2 \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} = 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right|$$

Então

$$L = \int_0^{\pi} |\alpha'(t)| dt = \int_0^{\pi} 2 \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = \int_0^{\pi} 2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) dt = -4 \cos \left(\frac{t}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = -4 \cos \frac{\pi}{2} + 4 \cos 0$$

Logo $L = 4$.

- b)** Uma parametrização da reta tangente à curva $C: \alpha(t) = (1 - \cos t, t - \sin t)$, $t \in I$ no ponto $\alpha(a)$ é dada por $\gamma(\lambda) = \alpha(a) + \lambda \alpha'(a)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Neste caso } a = \frac{\pi}{4}, \quad \alpha\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e}$$

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\sin \frac{\pi}{4}, 1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Logo uma parametrização da reta tangente l à curva no ponto $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$ é dada por

$$l: \gamma(\lambda) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \lambda \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{ou}$$

$$l: \gamma(\lambda) = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \lambda \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$