Consórcio cederj Fundação CECIERJ

Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP1– GEOMETRIA ANALÍTICA I – 31/03/2012

Nome:	Matrícula:
Polo:	Data:

Atenção!

- Identifique a Prova, colocando Nome, Matrícula, Polo e Data;
- É expressamente proibido o uso de calculadoras;
- Devolver a prova e a folha de respostas ao responsável;
- O desenvolvimento das questões pode ser a lápis. No entanto, as respostas deverão estar necessariamente à caneta;
- É expressamente proibido o uso de corretivo nas respostas.

Questão 1 [2,5 pontos]

Determine as equações paramétrica e cartesiana da reta que passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(5, 3)$.

Solução.

Como a reta passa pelos pontos $(-1, 2)$ e $(5, 3)$, sua direção poder ser dada pelo vetor de origem no primeiro e extremidade no segundo destes pontos,

$$\overrightarrow{v} = (5 - (-1), 3 - 2) = (6, 1).$$

Uma parametrização da reta pode então ser obtida com "início"em $(-1, 2)$, tendo $\overrightarrow{v} = (6, 1)$ como direção. Assim,

$$(x, y) = (-1, 2) + t \cdot \overrightarrow{v} = (-1, 2) + t \cdot (6, 1), t \in \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 6t \\ y = 2 + t \end{array} \right. , t \in \mathbb{R}.$$

Observação: Poderíamos ter obtido várias outras parametrizações corretas. A origem e a extremidade do vetor direção, por exemplo, poderiam ter sido invertidas, nos dando o vetor $(-6, -1)$. Além disso, poderíamos ter escolhido o "início"da parametrização em $(5, 3)$.

Para obtermos uma equação cartesiana, podemos trabalhar com a equação paramétrica de várias formas. Por exemplo, podemos isolar o t nas duas equações,

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + 6t \\ y = 2 + t \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t = \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \\ t = y - 2 \end{array} \right. ,$$

e igualar,

$$\frac{x}{6} + \frac{1}{6} = y - 2 \Leftrightarrow x + 1 = 6y - 12 \Leftrightarrow x - 6y + 13 = 0.$$

Questão 2 [2,5 pontos]

Dados $A = (1, 2)$ e $C = (3, 5)$,

(1) Determine $B = (x, 0)$ e $D = (0, y)$ tais que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

(2) Determine os vértices de um paralelogramo qualquer que possua centro (ponto médio das diagonais) em $(2, 3)$, um vértice sobre o eixo x, um sobre o eixo y e os outros dois no primeiro quadrante (isto é, suas coordenadas x e y são positivas).

Atenção: Além de exibir o paralelogramo pedido, é necessário justificar que é, de fato, um paralelogramo.

Solução.

(1) Queremos $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, mas

$$\overrightarrow{AD} = (0 - 1, y - 2) = (-1, y - 2)$$

$$\overrightarrow{BC} = (3 - x, 5 - 0) = (3 - x, 5),$$

assim,

$$(-1, y - 2) = (3 - x, 5),$$

que implica

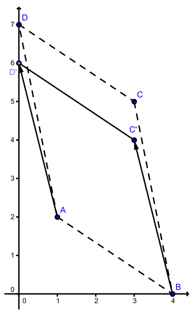
$$-1 = 3 - x \text{ e } y - 2 = 5,$$

logo,

$$x = 4 \text{ e } y = 7.$$

Assim, $B = (4, 0)$, $D = (0, 7)$.

(2)



Com os pontos A, B, C, D do item anterior, temos um paralelogramo cujo centro é o ponto $(2, 7/2)$ (ponto médio de A e C). Cum uma pequena adaptação, porém, podemos construir o paralelogramo desejado. Considere, por exemplo, $C' = (3, 4)$ e $D' = (0, 6)$. Observe, intuitivamente, que $ABC'D'$ é um ótimo candidato a paralelogramo, pois apenas "deslocamos" o lado CD para $C'D'$, mantendo-o paralelo e congruente a AB; mas como intuição não prova, vejamos por que ele satisfaz ao que se pede:

- O vértice B está sobre o eixo x, o vértice D' está sobre o eixo y, e os outros dois vértice, A e D' estão no primeiro quadrante.

- $ABC'D'$ é, de fato, um paralelogramo, pois

  $$\overrightarrow{AC'} = (3-1, 4-2) = (2,2) \text{ e } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'} = (4-1, 0-2) + (-1, 6-2) = (2,2).$$

  Com isso $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD'}$, provando que $ABC'D'$ é um paralelogramo. (veja observação da página 21 do Módulo).

  Outra forma de provar é observar que o ponto médio da diagonal AC' é dado por

  $$M = ((1+3)/2, (2+4)/2) = (2,3),$$

  e o da diagonal BD' é

  $$N = ((4+0)/2, (0+6)/2) = (2,3).$$

  Como estes pontos médios M e N coincidem, temos um paralelogramo.

  Um terceiro possível caminho (o mais simples de todos!), é ver que, pelo item anterior, $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{BC'}$. Assim, dois lados opostos do quadrilátero $ABC'D'$ são paralelos e congruentes, logo $ABC'D'$ é um paralelogramo.

- O centro do paralelogramo $ABC'D'$ é o ponto médio de A e C', dado por $((1+3)/2, (2+4)/2) = (2,3)$.

Questão 3 [2,5 pontos]

Considerando a reta $r : x + 2y = 0$, determine:

1. A equação da reta s_t, paralela a r, e que passa pelo ponto $(0,t)$. (Obs.: você deverá obter uma resposta em função de t).

2. A reta paralela a r cuja interseção com o círculo

   $$x^2 + y^2 + 40x + 128y = 2304$$

   contém o ponto $(0,16)$.

Solução.

(1) Escrevendo $r : x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$, uma reta s_t será paralela a r se, e somente se, tiver o mesmo coeficiente angular . Com isso, $s_t : y = -\frac{1}{2}x + n$, onde $n \in \mathbb{R}$. Para obter o que o enunciado pede, precisamos agora calcular n em função de t.

Como a reta s_t passa por $(0,t)$, este ponto satisfaz à equação de s_t. Assim,

$$t = -\frac{1}{2} \cdot 0 + n \therefore n = t.$$

Desta forma, a equação da reta s_t é

$$s_t : y = -\frac{1}{2}x + t,$$

que (embora seja desnecessário) pode ainda ser escrita

$$s_t : x + 2y - 2t = 0.$$

(2) Você não deve se assustar com o círculo apresentado! Pense com cuidado: a interseção da reta procurada, que chamaremos de s, com o círculo dado contém o ponto $(0, 16)$, o que significa que a reta s passa pelo ponto $(0, 16)$. Só este fato já é suficiente, não nos importa saber quem é o círculo, nem mesmo se há outro ponto na interseção dele com s.

Como s é paralela a r, sua equação será, pelo item anterior, da forma $s_t : y = -\frac{1}{2}x + t$, com $t = 16$. Assim,

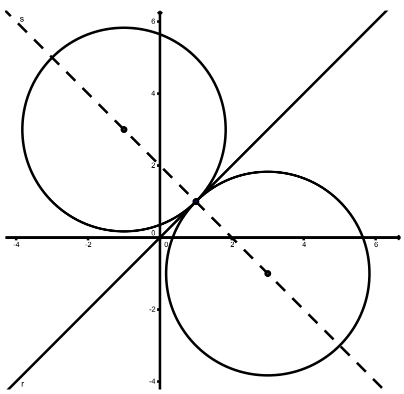
$$s : y - \frac{1}{2}x + 16 \therefore s : x + 2y - 32 = 0.$$

Questão 4 [2,5 pontos]

Determine a(s) equação(ões) do(s) círculo(s) de raio $2\sqrt{2}$ tangente(s) à reta $r : x - y = 0$, e que passam pelo ponto $(1, 1)$.

Solução.

Primeiramente, observamos que o ponto $(1, 1)$ pertence à reta r, pois $1 - 1 = 0$. Logo, como os círculos procurados são tangentes a r e passam por $(1, 1)$, o ponto de tangência será exatamente o $(1, 1)$ (veja figura abaixo). Note ainda que serão duas possibilidades para o círculo, um "abaixo"e outro "acima"da reta.



Sabemos que o raio do círculo que possui extremidade no ponto de tangência é perpendicular à tangente, assim, o centro dos círculos está sobre a reta s, perpendicular a r e passando por $(1, 1)$.

Vamos agora obter esta reta s.

Como s é perpendicular a r, sua direção é dad por um vetor normal a r. Pelos coeficientes de x e y em r, sabemos que o vetor $(1, -1)$ é normal a $r : x - y = 0$ [a reta de equação $ax + by + c = 0$ admite (a, b) como um vetor normal]. Além disso, $(1, 1) \in s$, logo, pode ser escrita

$$s : \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot t \\ y = 1 - 1 \cdot t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Como o centro do círculo está sobre s, será dado por $(1+1\cdot t, 1-1\cdot t) = (1+t, 1-t)$, e como a distância desse centro a $(1,1)$ é um raio, será igual a $2\sqrt{2}$. Assim,

$$2\sqrt{2} = d((1+t, 1-t),(1,1)) = \sqrt{((1+t)-1)^2 + ((1-t)-1)^2} = \sqrt{2t^2} = \sqrt{2}\,|t|,$$

logo,

$$t = \pm 2,$$

Atenção: É errado dizer que $\sqrt{a^2} = a$!!! Se $a = -1$, por exemplo, isso é falso. O correto é $\sqrt{a^2} = |a|$.

que nos dará duas possibilidades de centro,

$$C_1 = (1+2, 1-2) = (3,-1), \quad C_2 = (1+(-2), 1-(-2)) = (-1,3).$$

Observação: O centro pode ser encontrado trabalhando-se com a equação cartesiana de s, que será $x+y-2=0$.

Logo, as equações dos círculos serão

$$(x-3)^2 + (y-(-1))^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+1)^2 = 8,$$
$$(x-(-1))^2 + (y-3)^2 = (2\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 = 8.$$