

1ª Questão (3,0 pontos) Considere a região R , limitada pelas curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.

(a) (1,5 ponto) Calcule a área da região R .

Solução Observe que a interseção das curvas $\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 \end{cases}$ dá

$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -1$. Se $x = 2 \Rightarrow y = 4$. Se $x = -1 \Rightarrow y = 1$. Logo os pontos de interseção são $(2, 4)$ e $(-1, 1)$.

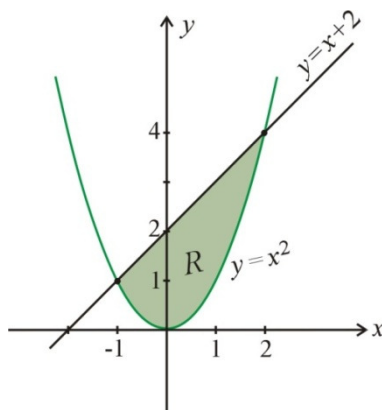


Figura 1

Da Figura 1 segue que

$$A(R) = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \left[\frac{9}{2} \right] \text{ unidades de área.}$$

(b) (1,5 ponto) Use o método dos discos ou arruelas para achar o volume do sólido S gerado pela rotação da região R em torno do eixo Ox .

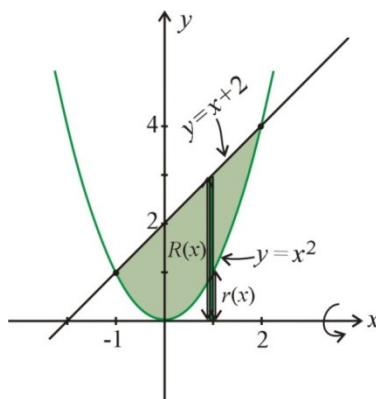


Figura 2

Da Figura 2 segue que

$$V(R) = \pi \int_{-1}^2 \left([R(x)]^2 - [r(x)]^2 \right) dx, \text{ onde } R(x) = (x+2) > 0 \text{ e } r(x) = x^2 \geq 0. \text{ Logo}$$

$$V(R) = \pi \int_{-1}^2 \left([x+2]^2 - [x^2]^2 \right) dx = \pi \int_{-1}^2 (x^2 + 4x + 4 - x^4) dx =$$

$$V(R) = \pi \left(\frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_{-1}^2 = \pi \left(\frac{8}{3} + 8 + 8 - \frac{32}{5} \right) - \pi \left(\frac{-1}{3} + 2 - 4 + \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{72}{5}\pi}$$

unidades de volume.

2ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,0 ponto) Usando o método de integração por partes, calcule $\int \arctg x \, dx$.

Solução

Faça $u = \arctg x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$ e $dv = dx \Rightarrow v = x$. Lembre que $\int u \, dv = uv - \int v \, du$.

$$\text{Assim } \int \arctg x \, dx = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \boxed{x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C}.$$

(b) (1,5 ponto) Usando o método de frações parciais, calcule $\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx$.

Solução

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \right) dx \quad (*)$$

$$1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

$$1 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

$$\begin{cases} A+C=0 & (1) \\ A+B=0 & (2) \\ B=1 & (3) \end{cases}$$

De (3) $B = 1$ e substituindo este valor na equação (2) resulta $A = -1$, logo de (3) segue que $C = 1$. Substituindo estes valores em (*) resulta

$$\int \frac{1}{x^2(x+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)} \right) dx = -\ln|x| - \frac{1}{x} + \ln|x+1| + C = \boxed{\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x} + C}$$

3ª Questão (2,5 pontos)

(a) (1,5 ponto) Calcule $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Solução

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \text{ Por outro lado, faça } u = \sqrt{x} \text{ então } du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx, \text{ logo}$$

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{-u} du = -2e^{-u} + C = -2e^{-\sqrt{x}} + C, \text{ assim } \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}} \Big|_1^b = 2e^{-1} - 2e^{-\sqrt{b}}$$

$$\text{Portanto } \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (2e^{-1} - 2e^{-\sqrt{b}}) = \boxed{2e^{-1}}, \text{ pois } \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\sqrt{b}} = 0.$$

(b) (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$, utilizando algum dos critérios apresentados em aula.

Solução Observe que $1+x^3 > x^3$ para $x \in [1, +\infty) \Rightarrow \sqrt{1+x^3} > \sqrt{x^3} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} < \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}, x \in [1, +\infty)$. Por outro lado, dos exemplos referenciais sabemos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \text{ converge, pois } p = \frac{3}{2} > 1, \text{ logo pelo teste de comparação temos que } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$$

converge.

4ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto) Usando variáveis separáveis, encontre a solução geral implícita da equação diferencial $y' = \frac{x^2 y - y}{y+1}$.

Solução

Da equação dada, temos que $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y - y}{y+1} = \frac{(x^2 - 1)y}{y+1}$

Podemos separar as variáveis na forma:

$$\frac{(y+1)}{y} dy = (x^2 - 1) dx \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = (x^2 - 1) dx \Rightarrow \int dy + \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx - \int dx \Rightarrow$$

$\boxed{y + \ln|y| = \frac{x^3}{3} - x + C}$ onde C é uma constante é uma solução implícita da equação diferencial dada.

(b) (1,0 ponto) Encontre a solução geral da equação diferencial de primeira ordem $y' + y = 2e^{-2x}$.

Solução

A equação diferencial $y' + y = 2e^{-2x}$ é linear, com $p(x) = 1$ e $q(x) = 2e^{-2x}$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\int p(x) dx = \int dx = x$. Portanto, o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x) dx} = e^x$

Logo
$$\underbrace{y'e^x + e^x y}_{\frac{d}{dx}(e^x y)} = 2e^{-2x} e^x = 2e^{-x}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x y) = 2e^{-x} \Rightarrow e^x y = 2 \int e^{-x} dx = -2e^{-x} + C$$

Isto é $e^x y = -2e^{-x} + C \Rightarrow \boxed{y = \frac{C}{e^x} - \frac{2}{e^{2x}}}$ é a solução geral da equação diferencial dada.