

Cálculo II – AD2 (2013/2) - Gabarito

1ª Questão

Solução:

- a) Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2 - u^2$, com $a = 1$ e $u = x$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função seno (ou cosseno), como mostra o triângulo associado da figura 1.1 a seguir

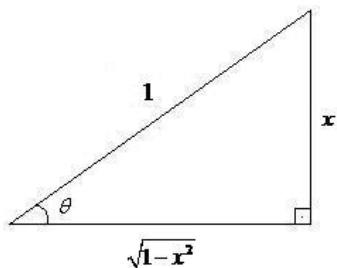


Figura 1.1

Assim $x = \sin \theta \Rightarrow dx = \cos \theta d\theta$. E ainda:

$$\begin{cases} \cos \theta = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow 1-x^2 = \cos^2 \theta \\ \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \text{ e } \sec \theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1-x^2} dx &= \int \frac{\sin^2 \theta \cdot \cos \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int \frac{1-\cos^2 \theta}{\cos \theta} d\theta = \int (\sec \theta - \cos \theta) d\theta = \\ &= \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| - \sin \theta + C \end{aligned}$$

Voltando para a variável original:

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}} \right| - x + C$$

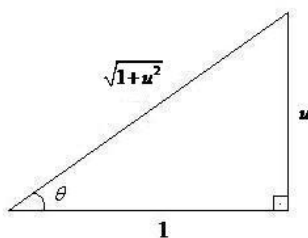
- b) Iniciemos calculando a primitiva. Para isso, comecemos fazendo a substituição simples

$$u = \sin t \Rightarrow du = \cos t dt.$$

Assim ficamos com

$$\int \frac{\cos t}{(1 + \sin^2 t)^{5/2}} dt = \int \frac{du}{(1 + u^2)^{5/2}} \quad (1)$$

Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2 + u^2$, com $a = 1$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função tangente (ou cotangente), como mostra o triângulo associado da figura 1.2 a seguir



Assim $u = \tan \theta \Rightarrow du = \sec^2 \theta d\theta$. E ainda:
$$\begin{cases} \sec \theta = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow 1+u^2 = \sec^2 \theta \\ \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \text{ e } \sin \theta = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \end{cases} \quad (2)$$

Substituindo em (1), fica

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos t}{(1 + \sin^2 t)^{5/2}} dt &= \int \frac{du}{(1 + u^2)^{5/2}} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^{5/2}} = \int \sec^{-3} \theta d\theta = \int \cos^3 \theta d\theta = \\ &= \int \cos^2 \theta \cos \theta d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta = \sin \theta - \frac{\sin^3 \theta}{3} + C. \end{aligned} \quad (3)$$

Precisamos agora voltar para a variável original.

Por (2), obtemos $\sin \theta = \frac{\sin t}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$.

Logo

$$\int \frac{\cos t}{(1 + \sin^2 t)^{5/2}} dt = \frac{\sin t}{(1 + \sin^2 t)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{\sin^3 t}{(1 + \sin^2 t)^{3/2}} + C$$

Para o cálculo da integral definida dada no enunciado, basta agora aplicar o TFC:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{(1 + \sin^2 t)^{5/2}} dt = \left[\frac{\sin t}{(1 + \sin^2 t)^{1/2}} - \frac{1}{3} \frac{\sin^3 t}{(1 + \sin^2 t)^{3/2}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} = \frac{5}{6\sqrt{2}}.$$

2ª Questão

a) Queremos estudar a convergência de $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, onde $f(x) = \frac{(x+1)^\alpha}{\sqrt[3]{x^6 + x + 1}}$.

Notemos que, como estamos interessados na integral no intervalo $x \in [1, +\infty)$, em particular $x > 0$, e assim podemos reescrever

$$\frac{(x+1)^\alpha}{\sqrt[3]{x^6 + x + 1}} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{\left(x \left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^\alpha}{\sqrt[3]{x^6 \left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}} = \frac{x^\alpha \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha}{x^2 \sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}} = \frac{1}{x^{2-\alpha}} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}}.$$

Seja $g(x) = \frac{1}{x^{2-\alpha}}$, temos que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}}$$

assim

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha}{\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}\right)}} = 1 > 0.$$

De acordo com o critério do limite do quociente, no que diz respeito à convergência, as integrais impróprias

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ e } \int_1^{+\infty} g(x) dx \text{ comportam-se da mesma forma.}$$

Agora

$$\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx.$$

De acordo com os exemplos de referência vistos nas aulas, a integral imprópria $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ é convergente

se, e somente se, $p > 1$. Portanto $\int_1^{+\infty} g(x) dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2-\alpha}} dx$ converge se $2 - \alpha > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha < 1}$.

Assim, $\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)^\alpha}{\sqrt[3]{x^6+x+1}} dx$ é convergente se, e somente se, $\alpha < 1$.

b) Por definição, para um valor de $s > 0$ fixado, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \alpha t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \cos \alpha t \, dt \quad (*)$$

Calculemos, para um valor de $T > 0$ fixado, a integral definida em (*). Inicialmente, obtenhamos a primitiva

$$\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt .$$

Usando integração por partes, façamos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \cos \alpha t \, dt \end{cases} \xRightarrow{\alpha \neq 0} \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = \frac{\sin \alpha t}{\alpha} \end{cases}$$

Assim

$$\underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} = e^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \int -se^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} dt = e^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} + \frac{s}{\alpha} \underbrace{\int e^{-st} \sin \alpha t \, dt}_{(II)} \quad (**)$$

Usando integração por partes novamente, agora em (II), façamos:

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \sin \alpha t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = -\frac{\cos \alpha t}{\alpha} \end{cases}$$

a integral (II) fica

$$\int e^{-st} \sin \alpha t \, dt = -\underbrace{e^{-st} \frac{\cos \alpha t}{\alpha}}_{(I)} - \int se^{-st} \frac{\cos \alpha t}{\alpha} dt = -e^{-st} \frac{\cos \alpha t}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} .$$

Substituindo em (**), fica:

$$\underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} = e^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} + \frac{s}{\alpha} \left[-e^{-st} \frac{\cos \alpha t}{\alpha} - \frac{s}{\alpha} \underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} \right]$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} = e^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{s}{\alpha^2} e^{-st} \cos \alpha t - \underbrace{\frac{s^2}{\alpha^2} \int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)}$$

Isolando no lado esquerdo os termos comuns contendo a integral (I), fica:

$$\begin{aligned} \underbrace{\left(1 + \frac{s^2}{\alpha^2}\right) \int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} &= e^{-st} \frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{s}{\alpha^2} e^{-st} \cos \alpha t = e^{-st} \left[\frac{\sin \alpha t}{\alpha} - \frac{s \cos \alpha t}{\alpha^2} \right] \\ \Rightarrow \underbrace{\int e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} &= \frac{e^{-st}}{s^2 + \alpha^2} [\alpha \sin \alpha t - s \cos \alpha t] \end{aligned}$$

Assim, usando o TFC, a integral definida em (*) fica

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^T e^{-st} \cos \alpha t \, dt}_{(I)} &= \frac{e^{-st}}{s^2 + \alpha^2} [\alpha \sin \alpha t - s \cos \alpha t] \bigg|_{t=0}^{t=T} = \\ &= \frac{e^{-sT}}{s^2 + \alpha^2} [\alpha \sin \alpha T - s \cos \alpha T] - \frac{e^{-s0}}{s^2 + \alpha^2} [\alpha \sin(\alpha \cdot 0) - s \cos(\alpha \cdot 0)] = \frac{e^{-sT}}{s^2 + \alpha^2} [\alpha \sin \alpha T - s \cos \alpha T] + \frac{s}{s^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Enfim, substituindo em (*), fica

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \alpha t \, dt &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{s^2 + \alpha^2} \left[s + e^{-sT} (\alpha \sin \alpha T - s \cos \alpha T) \right] = \\ &= \frac{s}{s^2 + \alpha^2} + \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{s^2 + \alpha^2} e^{-sT} (\alpha \sin \alpha T - s \cos \alpha T) \right] \end{aligned}$$

Como $s > 0$, temos que $\lim_{T \rightarrow +\infty} (-sT) = -\infty \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$.

Como, para $s > 0$ fixado, a função $y(t) = \alpha \sin \alpha t - s \cos \alpha t$ é limitada (mais precisamente $|y(t)| \leq \alpha + s$, para todo $t \in \mathbb{R}$), segue que $\lim_{T \rightarrow +\infty} [e^{-sT} (\alpha \sin \alpha T - s \cos \alpha T)] = 0$ e portanto

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos \alpha t \, dt = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}.$$

3ª Questão

Solução:

a) Fazendo

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \text{ temos}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2} dx = \int \frac{u}{(u^2 + 3u + 2)^2} du = \int \frac{u}{(u+1)^2(u+2)^2} du.$$

Usando o método das frações parciais, precisamos fazer a decomposição do integrando

$$\frac{u}{(u+1)^2(u+2)^2} = \frac{A}{u+1} + \frac{B}{(u+1)^2} + \frac{C}{u+2} + \frac{D}{(u+2)^2}$$

$$\Rightarrow A(u+1)(u+2)^2 + B(u+2)^2 + C(u+1)^2(u+2) + D(u+1)^2 = u$$

$$(A+C)u^3 + (5A+B+4C+D)u^2 + (8A+4B+5C+2D)u + (4A+4B+2C+D) = u$$

Assim, comparando os polinômios, devemos ter

$$\begin{cases} A+C=0 \\ 5A+B+4C+D=0 \\ 8A+4B+5C+2D=1 \\ 4A+4B+2C+D=0 \end{cases} \xrightarrow{C=-A} \begin{cases} A+B+D=0 & (1) \\ 3A+4B+2D=1 & (2) \\ 2A+4B+D=0 & (3) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)+(3)-(2)} \begin{cases} A+D=1 \\ 2A+D=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B=-1} \Rightarrow \begin{cases} A+D=1 \\ 2A+D=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A=3} \text{ e } \boxed{D=-2} \Rightarrow \boxed{C=-3}$$

Portanto

$$\frac{u}{(u+1)^2(u+2)^2} = \frac{3}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{3}{u+2} - \frac{2}{(u+2)^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{u}{(u+1)^2(u+2)^2} du = \int \left(\frac{3}{u+1} - \frac{1}{(u+1)^2} - \frac{3}{u+2} - \frac{2}{(u+2)^2} \right) du =$$

$$3\ln|u+1| + \frac{1}{u+1} - 3\ln|u+2| + \frac{2}{u+2} + C = 3\ln\left|\frac{u+1}{u+2}\right| + \frac{1}{u+1} + \frac{2}{u+2} + C$$

De volta à variável original ($u = e^x$):

$$\boxed{\int \frac{e^{2x}}{(e^{2x} + 3e^x + 2)^2} dx = 3\ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x + 2}\right) + \frac{1}{e^x + 1} + \frac{2}{e^x + 2} + C}$$

b) Note $\frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10}$ não é uma fração própria. Efetuando a divisão de polinômios, obtemos

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x & x^2 + 6x + 10 \\
 -x^4 - 6x^3 - 10x^2 & x^2 \\
 \hline
 \text{Resto } x &
 \end{array}$$

Assim $x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x = x^2(x^2 + 6x + 10) + x$ e portanto

$$\frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10} = \frac{x^2(x^2 + 6x + 10) + x}{x^2 + 6x + 10} = x^2 + \frac{x}{x^2 + 6x + 10}.$$

Completando o quadrado no denominador da última fração, temos que

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + 9 + 1 = (x + 3)^2 + 1.$$

Portanto, podemos reescrever a integral da forma

$$\int \frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10} dx = \int \left(x^2 + \frac{x}{(x+3)^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \underbrace{\int \frac{x}{(x+3)^2 + 1} dx}_{(**)} \quad (*)$$

Cálculo da integral ():**

Faça $u = x + 3 \Rightarrow du = dx$. Então

$$(**) = \int \frac{x}{(x+3)^2 + 1} dx = \int \frac{u-3}{u^2 + 1} du = \underbrace{\int \frac{u}{u^2 + 1} du}_{\substack{v=u^2+1 \\ dv=2u du}} - \int \frac{3}{u^2 + 1} du = \int \frac{1}{2} \frac{dv}{v} - 3 \arctg u =$$

$$\frac{1}{2} \ln |v| - 3 \arctg u = \frac{1}{2} \ln |u^2 + 1| - 3 \arctg u = \frac{1}{2} \ln |(x+3)^2 + 1| - 3 \arctg(x+3)$$

Assim, substituindo em (*), tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10} dx &= \int \left(x^2 + \frac{x}{(x+3)^2 + 1} \right) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \ln |(x+3)^2 + 1| - 3 \arctg(x+3) + C \\
 &= \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 6x + 10) - 3 \arctg(x+3) + C = \frac{x^3}{3} + \ln \sqrt{x^2 + 6x + 10} - 3 \arctg(x+3) + C.
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{x^4 + 6x^3 + 10x^2 + x}{x^2 + 6x + 10} dx = \frac{x^3}{3} + \ln \sqrt{x^2 + 6x + 10} - 3 \arctg(x+3) + C}$$