Fundação CECIERJ
Consórcio cederj
Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

AP1- CÁLCULO II-2010/2 Gabarito

1ª Questão (2,5 pontos)

Exercício 2: Considere a função $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in [-1,3]$

(a) (0,5) Faça o esboço do gráfico da função f no intervalo dado.

(b) (1,0) Calcule $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ e interprete o resultado em termos de áreas.

(c) (1,0) Encontre a área da região limitada pelo gráfico de f e pelo eixo dos x para $x \in [-1,3]$.

Solução

(a) Esboço do gráfico da função f no intervalo $[-1,3]$.

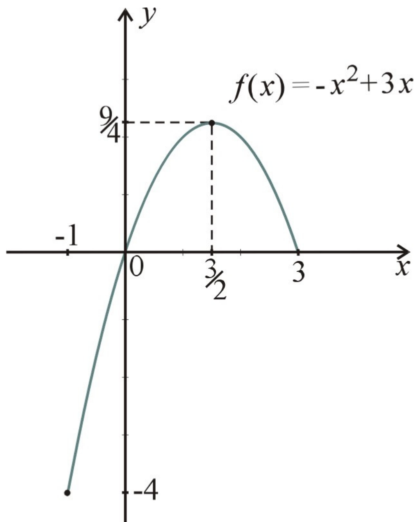

Figura 1

(b) $$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (-x^2+3x)\,dx = -\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2}\Bigg]_{-1}^{3} = -\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2} - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$= -9 + \frac{27}{2} - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2}\right) = -9 + \frac{27}{2} - \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = -9 + 12 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}.$$

A integral definida $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ neste caso pode ser interpretada como a diferença de duas áreas, isto é:

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx = -A(R_1) + A(R_2) = A(R_2) - A(R_1) \qquad (*)$$

Onde as regiões R_1 e R_2 são mostradas na Figura 2. $A(R_1)$ é a área da região R_1 e $A(R_2)$ é a área da região R_2. A diferença neste caso é o número positivo $\frac{8}{3}$ e indica que a diferença dada em (*) é positiva isto é $A(R_2)$ > $A(R_2)$ o que pode ser visto também na Figura 2 .

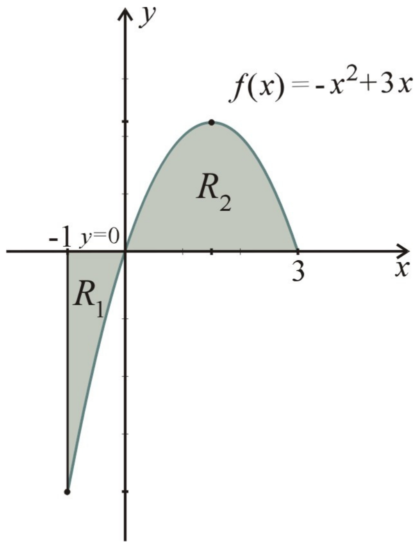

Figura 2

(c) Observe que neste caso a região R pedida é a união das regiões R_1 e R_2 mostradas na Figura 2, logo

$$A(R) = A(R_1) + A(R_2) = -\int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{3} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} (-x^2+3x)\,dx + \int_{0}^{3} (-x^2+3x)\,dx$$

$$= -(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2})\Big]_{-1}^{0} + (-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2})\Big]_{0}^{3} = (-\frac{(-1)^3}{3} + 3\frac{(-1)^2}{2}) + (-\frac{3^3}{3} + 3\frac{3^2}{2})$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 9 + \frac{27}{2} = \frac{19}{3} \text{ unidades de área.}$$

2ª Questão (1,5 pontos)

Calcule a derivada de $f(x) = (x^{\sqrt{2}} + \pi^{(x^2)})^x, \quad x \in (0, +\infty)$.

Solução

Observe que $f(x) = (x^{\sqrt{2}} + \pi^{(x^2)})^x = e^{x\ln(x^{\sqrt{2}} + \pi^{(x^2)})}$

Logo

$$f'(x) = e^{x\ln(x^{\sqrt{2}} + \pi^{(x^2)})}\,[x\ln(x^{\sqrt{2}} + \pi^{(x^2)})]'$$

$$f'(x) = e^{x\ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})}\,[x\left(\ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})\right)' + \ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})]$$

$$f'(x) = e^{x\ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})}\,[x(\frac{\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1}+\pi^{(x^2)}(2x)\ln\pi}{x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)}}) + \ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})]$$

ou

$$f'(x) = \ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})^x\,[\frac{\sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}}+2x^2\pi^{(x^2)}\ln\pi}{x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)}} + \ln(x^{\sqrt{2}}+\pi^{(x^2)})].$$

3ª Questão (3,0 pontos) - Calcule:

a) (1,5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^x$ **b)** (1,5) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx$.

Solução

a) Observe que o limite dado é da forma 1^∞ pois $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)=1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to+\infty} e^{x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)} \qquad (*)$$

Por outro lado

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x}{x-2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\frac{1}{x}} \quad\to\quad \frac{0}{0}$$

$$\underbrace{=}_{L'H}\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\frac{(x-2)-x}{(x-2)^2}}{\frac{x}{x-2}}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}(-\frac{\frac{-2}{x(x-2)}}{-\frac{1}{x^2}}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x-2}=2 \qquad (**)$$

Substituindo (**) em (*) resulta que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^x = e^2$.

b) $\displaystyle\int \underbrace{\operatorname{arcsen}(x)}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv}$

Fazendo $u=\operatorname{arcsen}(x)$ e $dv=dx$ temos $du=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ e $v=x$

Assim

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (1)$$

Fazendo a substituição $s = 1 - x^2$ com $ds = -2x\,dx$ na última integral resulta

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{ds}{\sqrt{s}} = -\frac{1}{2}\int s^{-1/2}ds = -\frac{1}{2}\left(\frac{s^{1/2}}{1/2}\right) + C = -\sqrt{1-x^2} + C \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1) temos

$$\int \operatorname{arcsen}(x)\,dx = x\operatorname{arcsen}(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

4ª Questão (3,0 pontos) – Dada a função $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, determine:

a) (0,2 pontos) o domínio de f ;
b) (0,5 pontos) as assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de f ;
c) (0,5 pontos) os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;
d) (0,3 pontos) os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem);
e) (0,5 pontos) os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima;
f) (0,3 pontos) os pontos de inflexão (se existirem);
g) (0,5 pontos) um esboço do gráfico de f ;
h) (0,2 pontos) a imagem de f .

Solução

a) O domínio de *f* = $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

b) As assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de *f*:

Como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$, temos que $y = 0$ **é uma assíntota horizontal** à direita.

Por outro lado, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2}.\ln x = -\infty$, logo temos que $x = 0$ **é uma assíntota vertical.**

c) Os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;

Note-se que $f'(x) = \dfrac{x^2\frac{1}{x} - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-2\ln x=0$, isto é $2\ln x=1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow x=e^{1/2}$

O único ponto crítico de f é $x=e^{1/2}$. Estudando o sinal de $f'(x)$ lembre-se que $x>0$ assim o denominador x^3 é sempre positivo e se consideramos $0<x<e^{1/2}$, como $\ln$ é uma função crescente temos que $\ln x<\ln e^{1/2}=\frac{1}{2}$, isto é $1-2\ln x>0$, analogamente pode-se provar que se $x>e^{1/2}$ então $1-2\ln x<0$. Resumindo, se $0<x<e^{1/2}$, então $f'(x)>0$ e se $x>e^{1/2}$ então $f'(x)<0$.

Logo f é crescente no intervalo $\left(0,e^{1/2}\right)$ e f é decrescente no intervalo $\left(e^{1/2},+\infty\right)$.

d) Os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem);

Observando (c) , podemos notar que $x=e^{1/2}$ é ponto de máximo relativo.
Como $x=e^{1/2}$ é o único ponto crítico temos que $f(e^{1/2})=\frac{1}{2e}$ é o valor máximo da função. Portanto, $x=e^{1/2}$ é ponto de máximo absoluto. No entanto, como no item (b) observamos que $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, podemos afirmar que f , não assume valor mínimo absoluto.

e) Os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima;

$$f''(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1-2\ln x}{x^3}\right)=\frac{x^3\left(-\frac{2}{x}\right)-3x^2(1-2\ln x)}{x^6}=\frac{-2x^2-3x^2+6x^2\ln x}{x^6}=$$
$$=\frac{-5+6\ln x}{x^4}$$

Note que $f''(x)=0 \Leftrightarrow -5+6\ln x=0$, isto é $6\ln x=5 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x=\frac{5}{6} \quad \Leftrightarrow x=e^{5/6}$

Estudando o sinal de f'', obtemos:

	0	$e^{5/6}$
x^4	+	+
$-5+6\ln x$	−	+
$f''(x)$	−	+
f	Côncava para baixo	Côncava para cima

o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(0,\ e^{5/6})$,
e o gráfico de f é côncava para cima no intervalo $(e^{5/6},+\infty)$.

f) Os pontos de inflexão (se existirem);

De (e) temos que:

P = $\left(e^{5/6}, f(e^{5/6})\right)$ é ponto de inflexão do gráfico de f pois o gráfico possui reta tangente no ponto P e f'' muda de sinal somente em $x = e^{5/6}$

Como $f(e^{5/6}) = \dfrac{\ln e^{5/6}}{(e^{5/6})^2} = \dfrac{5}{6}e^{-5/3}$ então P = $\left(e^{5/6}, \dfrac{5}{6e^{5/3}}\right)$ é o ponto de inflexão do gráfico de *f*.

g) Um esboço do gráfico de *f*;

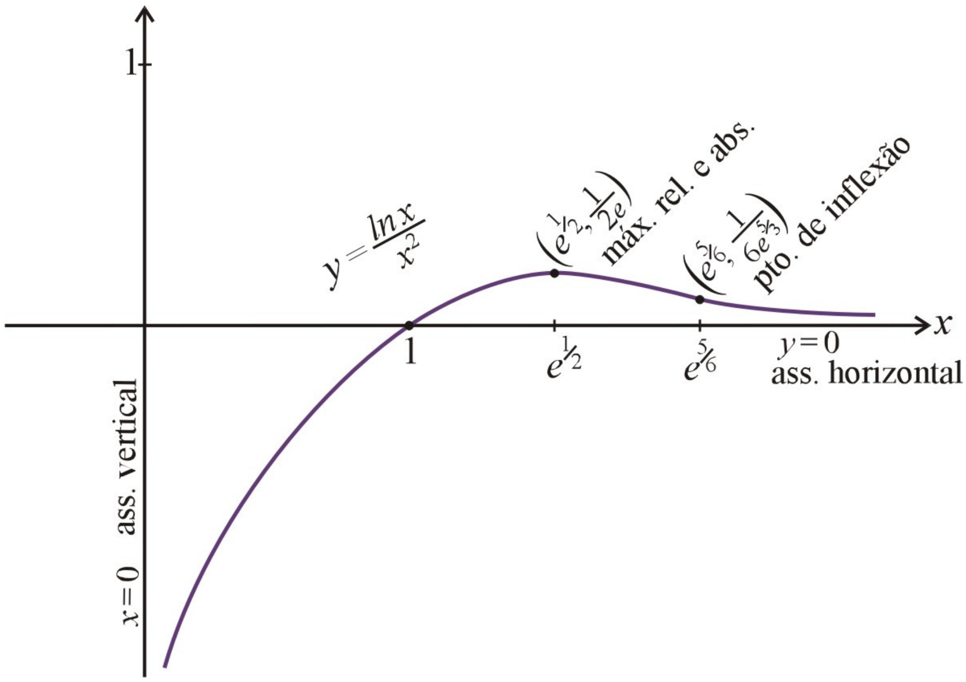

Figura 3