AP3- CÁLCULO II- 2010/1 (Gabarito)

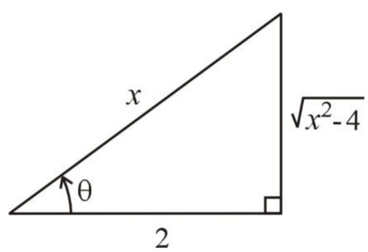
1ª Questão (3,0 pontos) Calcule as seguintes integrais:

a) (1,5 ponto) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx$, **b)** (1,5 ponto) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}\,dx$

Solução

a) (A Integral indefinida foi resolvida no Exercício 4 do EP8-EP9)

Usaremos o método de substituição trigonométrica para resolver esta integral indefinida



Do triângulo retângulo associado tem-se:

$$\sec\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\sec\theta \\ dx = 2\sec\theta\,\mathrm{tg}\,\theta\,d\theta \end{cases}.$$

Também $\mathrm{tg}\,\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2} \Rightarrow \sqrt{x^2-4} = 2\,\mathrm{tg}\,\theta$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx = \int \frac{2\mathrm{tg}\theta}{2\sec\theta}2\sec\theta\,\mathrm{tg}\theta\,d\theta = 2\int \mathrm{tg}^2\theta\;d\theta = 2\int(\sec^2\theta-1)\;d\theta$$

$$= 2\int \sec^2\theta\,d\theta - 2\int\;d\theta = 2\mathrm{tg}\theta - 2\theta = \sqrt{x^2-4} - 2\,\mathrm{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b) (A integral foi resolvida no Exemplo 10.5 das notas de aula)

Note que a função racional $R(x) = \dfrac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}$ é própria. Como o fator linear $(x-2)$ ocorre duas vezes a decomposição em frações parciais é

$$\frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} \qquad (*)$$

Para determinar os valores de A, B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $x(x-2)^2$, obtendo

$x^2-3x+4=A(x-2)^2+B\,x(x-2)+C\,x$

Usando o 3º Método

Se $x=2 \quad\Rightarrow\quad 2^2-3(2)+4=C(2) \quad\Rightarrow\quad 4-6+4=2C \quad\Rightarrow\quad C=1$

Se $x=0 \quad\Rightarrow\quad 4=A(0-2)^2 \quad\Rightarrow\quad A=1$

Se tomarmos um valor arbitrário, digamos

$x=1 \quad\Rightarrow\quad 1-3+4=(1-2)^2+B(1-2)+1 \quad\Rightarrow\quad 2=1+(-B)+1 \quad\Rightarrow\quad B=0$

Logo,

$$\int\frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx=\int(\frac{1}{x}+\frac{0}{x-2}+\frac{1}{(x-2)^2})\,dx=\int\frac{dx}{x}+\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\ln|x|+\int(x-2)^{-2}dx+C$$

Finalmente, $$\int\frac{x^2-3x+4}{x(x-2)^2}dx\;=\ln|x|+\frac{-1}{(x-2)}+C=\ln|x|-\frac{1}{(x-2)}+C.$$

2ª Questão (3,0 pontos).

Seja R a região no primeiro quadrante limitada por $y=x^2-1,\ x=2$ e $y=0$

a) (0,5 ponto) Esboce R

b) (1,0 ponto) Calcule a área de R.

c) (1,5 ponto) Calcule o volume do sólido obtido pela revolução da região R em torno do eixo Oy. Faça um esboço do sólido.

Solução

a) Esboço da região R

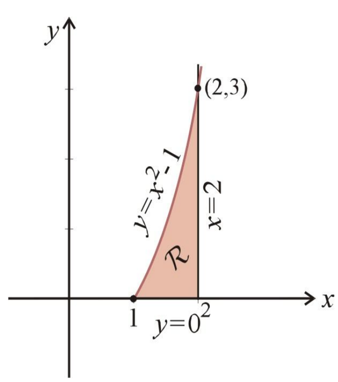


Figura 1

b)

$$A(R)=\int_1^2 (x^2-1)\,dx=\frac{x^3}{3}-x\Big]_1^2=(\frac{2^3}{3}-2)-(\frac{1^3}{3}-1)=\frac{8}{3}-2-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}-1=\frac{4}{3}$$ unidades de área.

b) Usaremos o método das cascas cilíndricas

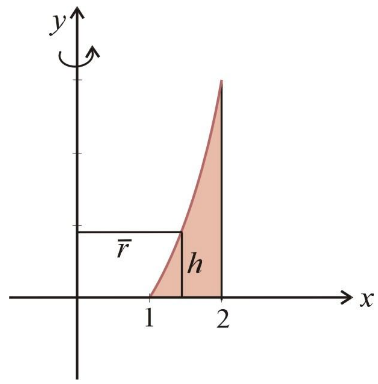


Figura 2

$$V(R)=2\pi\int_1^2 x(x^2-1)\,dx=\pi\int_1^2 (x^2-1)\,2x\,dx=\pi\,\frac{(x^2-1)^2}{2}\Big]_1^2=\pi[\frac{(2^2-1)^2}{2}]=\frac{9\pi}{2}$$ unidades de volume.

O esboço do sólido aparece na Figura 3

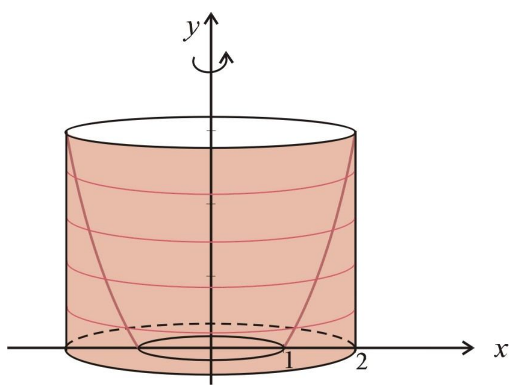


Figura 3

3ª Questão (1,0 ponto) Usando critérios de convergência, determine a convergência ou divergência da seguinte integral imprópria:

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+x^3}}\,dx$$

Solução

(Este exercício foi resolvido no Exercício 11.15 (b) das notas de aula)

Note que $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}>0$ e $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4+x^3}}>0$ em $[1,+\infty)$

Podemos usar **o critério do limite do quociente ou também chamado teste de comparação no limite** com $f(x)$ e $g(x)$ acima definidas. Como

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{4+x^3}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4+x^3}}{\sqrt{x^3}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{4}{x^3}+1}=1\in(0,+\infty)$. Então as integrais impróprias $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$ e $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ comportam-se da mesma maneira, ou seja, ambas convergem ou ambas divergem. Por outro lado sabemos *do primeiro exemplo referencial das notas de aula, [ou exemplo 27.2 do modulo 2]* que

"$\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^r}dx$ **com** $a>0$ **converge se** $r>1$ **e diverge se** $r\leq 1$**.**"

Assim neste caso $a=1>0$ e $r=\dfrac{3}{2}>1$, logo $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3}}dx$ converge. Portanto $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{4+x^3}}dx$ também converge.

4ª Questão (3,0 pontos)

a) (1,5 ponto) Encontre $\lim\limits_{t\to\sqrt{2}}\left(\dfrac{t^2-2}{t-\sqrt{2}},\dfrac{e^{\sqrt{2}}-e^t}{t^3-2\sqrt{2}}\right)$ se existir.

b) (1,5 ponto) Calcule a integral da seguinte função vetorial $\beta(t)=\left(\dfrac{1}{\cos^2 t},\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t}\right)$, sobre o intervalo $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$.

Solução

a) (Este exercício foi resolvido no Exercício 13.15 (b) das notas de aula)

Observe que quando $t\to\sqrt{2}$, $\dfrac{t^2-2}{t-\sqrt{2}}$ é uma forma indeterminada da forma $\dfrac{0}{0}$ assim estamos nas condições de aplicar a regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{t^2-2}{t-\sqrt{2}}\overset{L'H}{=}\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{2t}{1}=2\sqrt{2}$$

Analogamente quando $t\to\sqrt{2}$, $\dfrac{e^{\sqrt{2}}-e^t}{t^3-2\sqrt{2}}$ é uma forma indeterminada da forma $\dfrac{0}{0}$ assim estamos nas condições de aplicar a regra de L'Hôpital e temos

$$\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{e^{\sqrt{2}}-e^t}{t^3-2\sqrt{2}}\overset{L'H}{=}\lim_{t\to\sqrt{2}}\frac{-e^t}{3t^2}=\frac{-e^{\sqrt{2}}}{3(2)}=-\frac{1}{6}e^{\sqrt{2}}$$

Portanto

$$\lim_{t\to\sqrt{2}}\left(\frac{t^2-2}{t-\sqrt{2}},\frac{e^{\sqrt{2}}-e^t}{t^3-2\sqrt{2}}\right)=(2\sqrt{2},-\frac{1}{6}e^{\sqrt{2}})$$

c) (Este exercício foi resolvido no Exercício 15.10 (a) das notas de aula)

Precisamos calcular a integral da função vetorial:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\beta(t)\,dt=\left(\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 t}dt,\ \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\text{sen }t}{\cos^2 t}dt\right)$$

Sabemos que

- $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\sec^2 t\,dt=\text{tg }t\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}=\text{tg }\frac{\pi}{4}-\text{tg }(-\frac{\pi}{4})=1-(-1)=2$$

Por outro lado

- $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\text{sen }t}{\cos^2 t}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\text{sen}\,t}{\cos t}.\frac{1}{\cos t}dt=\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\text{tg}\,t.\sec t\,dt=\sec t\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4}$$

  $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\text{sen }t}{\cos^2 t}dt=\sec\frac{\pi}{4}-\underbrace{\sec(-\frac{\pi}{4})}_{F.PAR}=\sec\frac{\pi}{4}-\sec\frac{\pi}{4}=0$$

Portanto $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\beta(t)\,dt=(2,0)$ ou $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\beta(t)\,dt=2\vec{i}$.