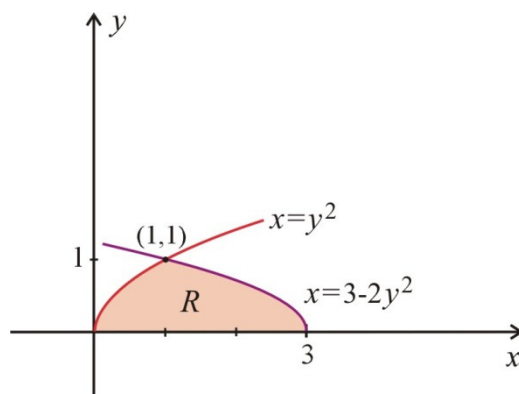


1ª Questão (3,0 pontos) Considere a região R sombreada mostrada na seguinte figura:



(a) (1,5 ponto) Calcule a área da região R .

(b) (1,5 ponto) Use o método dos discos ou arruelas para achar o volume do sólido S gerado pela rotação da região R em torno do eixo Oy .

Solução

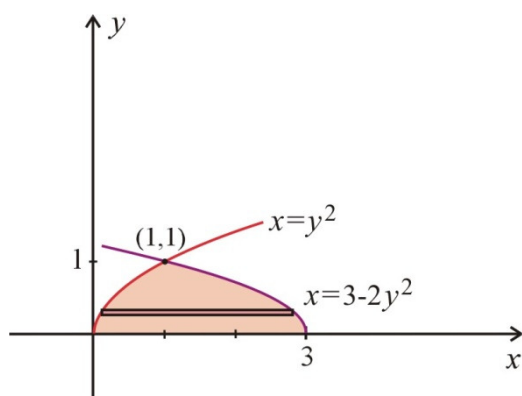


Figura 2

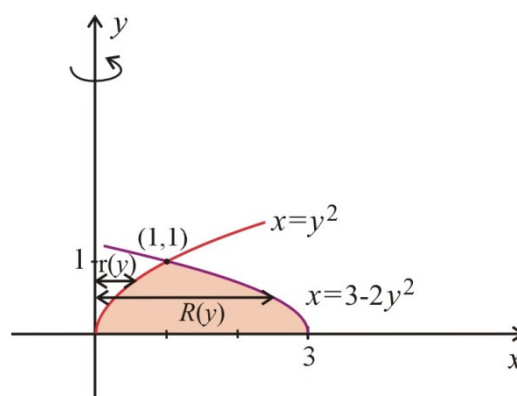


Figura 3

(a) Da Figura 2 segue que

$$A(R) = \int_0^1 [(3 - 2y^2) - y^2] dy = \int_0^1 [3 - 3y^2] dy = [3y - y^3]_0^1 = 3 - 1 = 2 \text{ unidades de área}$$

(b) Da Figura 3 segue que

$$V = \pi \int_0^1 ([R(y)]^2 - [r(y)]^2) dy, \text{ onde } R(y) = (3 - 2y^2) > 0 \text{ e } r(y) = y^2 \geq 0.$$

$$V(R) = \pi \int_0^1 \left([3 - 2y^2]^2 - [y^2]^2 \right) dy = \pi \int_0^1 (9 - 12y^2 + 3y^4) dy =$$

$$V(R) = \pi \left(9y - 4y^3 + \frac{3}{5}y^5 \right) \Big|_0^1 = \pi \left(9 - 4 + \frac{3}{5} \right) = \frac{28}{5} \pi \text{ unidades de volume.}$$

2ª Questão (3,0 pontos)

(a) (1,5 ponto) Usando o método de substituição, calcule $\int x^{-3}(1+x^{-2})^{-3} dx$.

(b) (1,5 ponto) Usando o método de frações parciais, calcule $\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx$.

Solução

$$(a) \int x^{-3}(1+x^{-2})^{-3} dx = \int \frac{x^{-3}}{(1+x^{-2})^3} dx$$

Faça $u = 1 + x^{-2}$ então $du = -2x^{-3}dx$ logo $-\frac{du}{2} = x^{-3}dx$. Assim

$$\int \frac{x^{-3}}{(1+x^{-2})^3} dx = \int \frac{-du}{2u^3} = -\frac{1}{2} \int u^{-3} du = -\frac{1}{2} \left(\frac{u^{-2}}{-2} \right) + C = \frac{1}{4u^2} + C = \frac{1}{4(1+x^{-2})^2} + C$$

$$(b) \int \frac{1}{x(x^2+4)} dx$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)} = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \right) dx \quad (*)$$

$$1 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$$

$$1 = (A+B)x^2 + Cx + 4A$$

$$\begin{cases} A+B=0 & (1) \\ C=0 & (2) \\ 4A=1 & (3) \end{cases}$$

De (3) $A = 1/4$ e substituindo este valor na equação (1) resulta $B = -1/4$, de (2) segue que $C = 0$. Substituindo estes valores em (*) resulta

$$\int \frac{dx}{x(x^2+4)} = \int \left(\frac{1}{4x} - \frac{x}{4(x^2+4)} \right) dx = \frac{1}{4} \ln|x| - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + C.$$

3ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto) Calcule $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$.

(b) (1,0 ponto) Analise a convergência ou divergência da integral $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}+1}{x} dx$, utilizando algum dos critérios apresentados em aula.

Solução

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-3x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{(-3)} \int_0^b e^{-3x} (-3) dx = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-3x} \Big|_0^b = -\frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} [e^{-3b} - 1] = \frac{1}{3}.$

Pois $\lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-3b} = 0.$

(b) Observe que $e^{-x}+1 > 1 \Rightarrow \frac{e^{-x}+1}{x} > \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$. Por outro lado, dos exemplos referenciais sabemos que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge, logo pelo teste de comparação temos que

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-x}+1}{x} dx \text{ diverge.}$$

4ª Questão (2,0 pontos)

(a) (1,0 ponto) Usando variáveis separáveis, encontre a solução geral implícita da equação diferencial $y' = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$.

(b) (1,0 ponto) Encontre a solução da equação diferencial de primeira ordem $xy' + y = \sin x$, $x > 0$ tal que $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Solução

(a) Da equação dada, temos que $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$

Podemos separar as variáveis na forma:

$$2y \, dy + \cos y \, dy = 6x^2 \, dx \Rightarrow \int 2y \, dy + \int \cos y \, dy = \int 6x^2 \, dx \Rightarrow$$

$y^2 + \sin y = 2x^3 + C$, onde C é uma constante, é uma solução implícita da equação diferencial dada.

(b) Da equação diferencial dada, segue que $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$, $x > 0$ é linear, com $p(x) = \frac{1}{x}$ e

$q(x) = \frac{\sin x}{x}$. Podemos utilizar a fórmula para a solução geral ou podemos trabalhar por etapas, onde não é necessário decorar a fórmula:

Observe que $\int p(x) \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x|$. Por outro lado, do valor inicial vemos que $x > 0$,

assim $\ln |x| = \ln x$. Portanto, o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x) \, dx} = e^{\ln x} = x$

Logo

$$\underbrace{y'x + \frac{1}{x}xy}_{\frac{d}{dx}(xy)} = x \frac{\sin x}{x} = \sin x \Rightarrow \frac{d}{dx}(xy) = \sin x \Rightarrow xy = \int \sin x + C$$

Isto é $xy = -\cos x + C \Rightarrow y = -\frac{1}{x} \cos x + \frac{C}{x}$ é a solução geral da equação diferencial dada. Para resolver o problema de valor inicial observe que $y(\frac{\pi}{2}) = 0 + \frac{C}{\pi/2} = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$.

Portanto a solução do problema de valor inicial dado é: $\boxed{y = -\frac{1}{x} \cos x + \frac{\pi}{2x}}$.