Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP2 – Geometria Analítica II – 2013/2

Gabarito

Questão 1 (2,5 pontos): Obtenha a equação da superfície $\mathcal{S}$ que descreve o lugar geométrico dos pontos do espaço cuja soma dos quadrados de suas distâncias aos eixos OX e OY é sempre igual a 16. Classifique e faça um esboço de $\mathcal{S}$.

Solução:
A superfície procurada é a seguinte:

$$\mathcal{S} = \{P \in \mathbb{R}^3 \,|\, d(P, \text{eixo } OX)^2 + d(P, \text{eixo } OY)^2 = 16\}.$$

Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a $\mathcal{S}$, se e somente se, $(\sqrt{y^2 + z^2})^2 + (\sqrt{x^2 + z^2})^2 = 16$. Logo,

$$x^2 + y^2 + 2z^2 = 16 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{8} = 1$$

que representa um elipsoide.

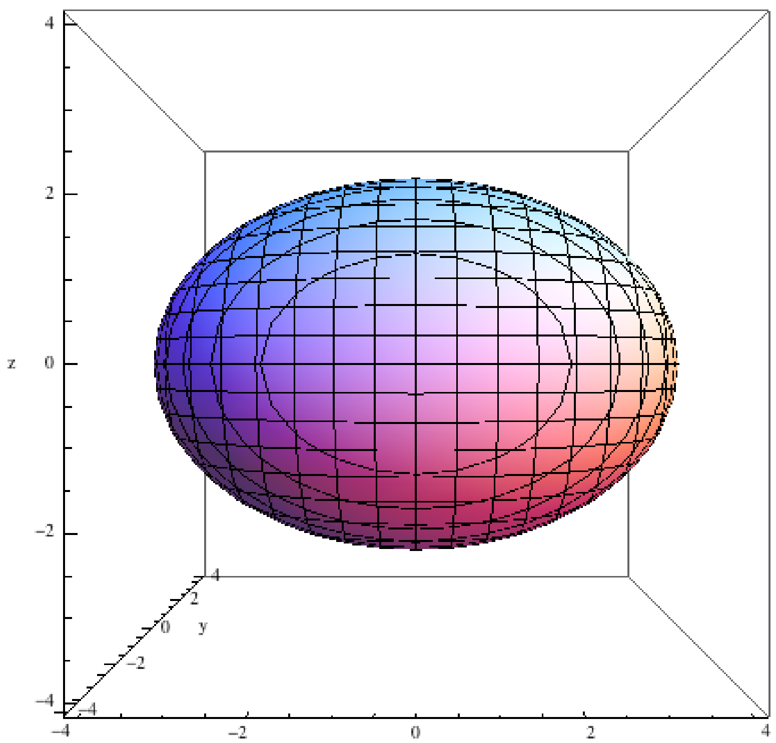

Figura 1: Elipsoide $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{8} = 1$.

Questão 2 (2,5 pontos): Determine a equação cartesiana da superfície $\mathcal{S}$ obtida girando, em torno do eixo OZ, o círculo $\mathcal{C}$ no plano YZ de centro $C = (0, 4, 1)$ e raio 2. Faça um esboço da superfície.

Solução:

A geratriz da superfície $\mathcal{S}$ é o círculo $\mathcal{C} : \begin{cases} x = 0 \\ (y-4)^2 + (z-1)^2 = 4 \end{cases}$. Como, para todo ponto $Q = (0, y', z')$ pertence a $\mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} (y'-4)^2 \leq 4 &\iff |y'-4| \leq 2 \\ &\iff 2 \leq y' \leq 6, \end{aligned}$$

devemos substituir, na equação $f(y', z') = (y'-4)^2 + (z'-1)^2 - 4 = 0$, a variável z' por z e a variável y' por $\sqrt{x^2+y^2}$, para obtermos a equação cartesiana da superfície

$$(\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + (z-1)^2 = 4\,.$$

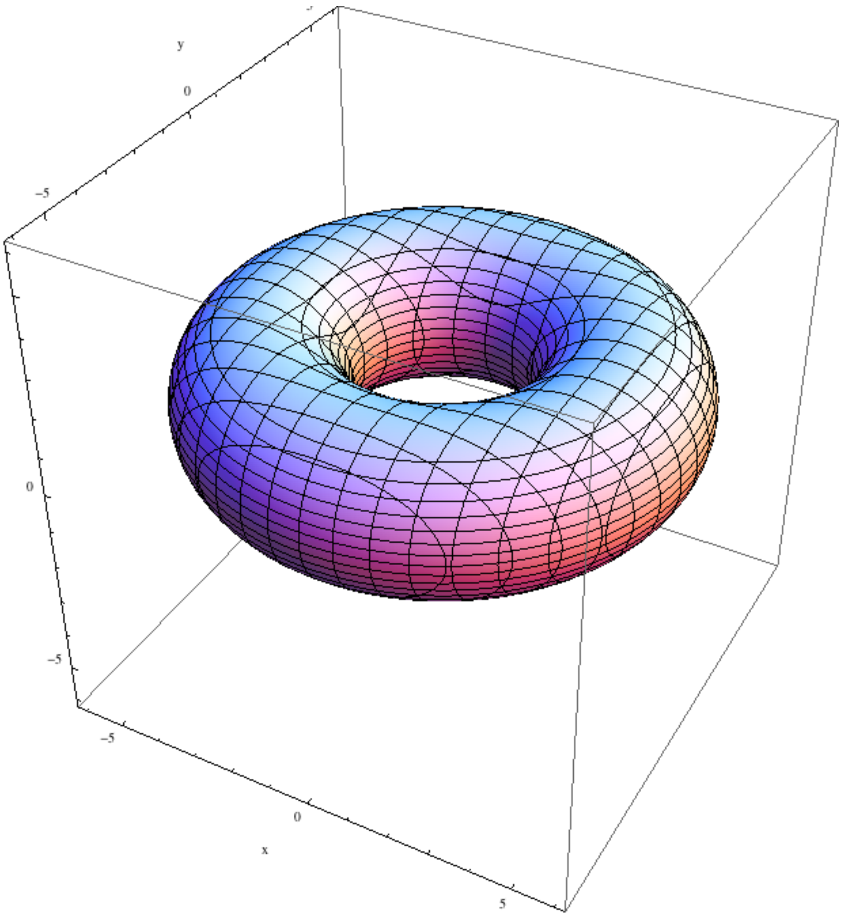

Figura 2: A superfície $\mathcal{S}$ é chamada Toro.

Questão 3 (2,5 pontos): Considere um plano Π_1 paralelo ao plano $\Pi_2 : 2x + 2y + z = 1$ e o ponto $P = (2, 2, 2)$ equidistante dos planos Π_1 e Π_2. Determine as equações paramétricas do plano Π_1.

Solução:

O plano Π_1 é paralelo ao plano Π_2, logo Π_1 é da forma

$$2x + 2y + z = d,$$

para algum d real. Como

$$d(\Pi_2, P) = \frac{|2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 3$$

e P equidista de Π_1 e Π_2 temos:

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = 2d(\Pi_2, P) = 2 \cdot 3\,.$$

Daí,

$$\begin{aligned} d(\Pi_1, \Pi_2) = 6 \iff & \frac{|d-1|}{\sqrt{2^2+2^2+1}} = 6 \\ \iff & |d-1| = 18 \\ \iff & d = 19 \ \text{ ou } \ d = -17\,. \end{aligned}$$

Assim, Π_1 é o plano $\alpha_1 : 2x + 2y + z = 19$ ou $\alpha_2 : 2x + 2y + z = -17$. Para decidir entre as duas opções, vamos calcular a distância de P à α_1 e α_2 que deve ser igual a 3:

- $d(\alpha_1, P) = \dfrac{|2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2 - 19|}{2^2+2^2+1} = \dfrac{9}{3} = 3 = d(\Pi_2, P)$;
- $d(\alpha_2, P) = \dfrac{|2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2 + 17|}{2^2+2^2+1} = \dfrac{27}{3} = 9 \neq d(\Pi_2, P)$.

Portanto, o plano Π_1 é o plano

$$2x + 2y + z = 19.$$

Questão 4 (2,5 pontos): Considere as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = 3 \\ y = t \\ z = t+1 \end{cases},\ t \in \mathbb{R}\,.$$

(a) Mostre que r_1 e r_2 são retas reversas.

(b) Determine a reta que intercepta r_1 e r_2 ortogonalmente.

(c) Calcule a distância entre as retas r_1 e r_2.

Solução:

(a) Note que $r_1 \parallel \overrightarrow{v_1} = (1,2,0)$ e $r_2 \parallel \overrightarrow{v_2} = (0,1,1)$. Como $\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = (2,-1,1) \neq (0,0,0)$, temos que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são linearmente independentes. Logo, r_1 e r_2 não podem ser paralelas nem coincidentes. Vamos verificar que não existe interseção entre as retas r_1 e r_2. Para isso, usaremos o parâmetro s na reta r_2 para diferençá-lo do parâmetro t da reta r_1. Agora, o sistema

$$\begin{cases} t = 3 \\ 2t = s \\ 1 = s + 1 \end{cases}$$

não possui solução, pois na primeira equação $t = 3$, na segunda $s = 6$ e na terceira $s = 1$. Assim, as retas r_1 e r_2 não podem ser concorrentes e daí, as retas r_1 e r_2 são reversas.

(b) Sejam $P = (t, 2t, 1) \in r_1$ e $Q = (3, s, s+1) \in r_2$ tais que $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{v_2}$. Como $\overrightarrow{PQ} = (3-t, s-2t, s)$, temos que $\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle = 2s - 5t + 3 = 0$ e $\left\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{v_2} \right\rangle = 2s - 2t = 0$. Resolvendo o sistema $\begin{cases} 2s - 5t = -3 \\ 2s - 2t = 0 \end{cases}$, encontramos $t = s = 1$. Daí, $P = (1,2,1), Q = (3,1,2)$ e $\overrightarrow{PQ} = (2,-1,1)$.

A única reta u que intersecta r_1 e r_2 ortogonalmente é a reta que passa por P e é paralela ao vetor $\overrightarrow{PQ}$. Logo,

$$u : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 2 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

é a reta procurada.

(c) $d(r_1, r_2) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{6}$.
