Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Cálculo II – AD1 (2012/1) – Gabarito

Solução da 1ª Questão

Considere a figura 1.1 abaixo , representando o mesmo gráfico dado no enunciado

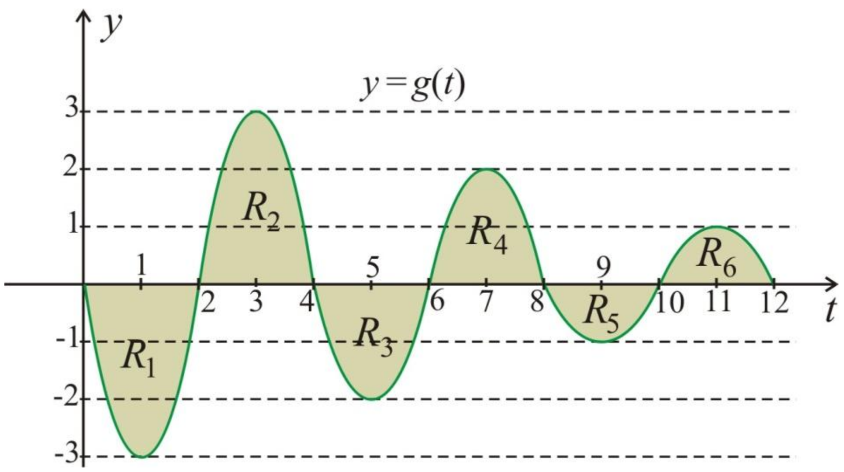

Figura 1.1

Denotemos por

$A_1 = área(R_1)$, $A_2 = área(R_2)$, $A_3 = área(R_3)$, $A_4 = área(R_4)$, $A_5 = área(R_5)$ e $A_6 = área(R_6)$.

De acordo com os dados do enunciado, a figura naturalmente nos dá que:

$$A_1 = A_2 > A_3 = A_4 > A_5 = A_6 > 0. \qquad (*)$$

a) Por definição $\boxed{G(0) = \int_0^0 g(t)\,dt = 0}$, como visto no caderno didático, uma vez que os extremos de integração são os mesmos, ambos iguais a zero e g esta definida em $t = 0$.

Pela definição 2.2 do caderno didático, tem-se:

$$A_1 = -\int_0^2 g(t)\,dt \ ,\ A_2 = \int_2^4 g(t)\,dt\ ,\ A_3 = -\int_4^6 g(t)\,dt\ ,\ A_4 = \int_6^8 g(t)\,dt \ ,\ A_5 = -\int_8^{10} g(t)\,dt \text{ e } A_6 = \int_{10}^{12} g(t)\,dt\ .$$

Estimativa para $G(2)$:

Por definição: $G(2) = \int_0^2 g(t)\,dt = -A_1 < 0 = G(0)$, isto é , $\boxed{G(2) = -A_1 < G(0) = 0}$

Estimativa para $G(4)$:

Novamente, usando a definição , a proposição 2.2 do caderno didático e (*), obtemos:

$$G(4)=\int_0^4 g(t)\,dt=\int_0^2 g(t)\,dt+\int_2^4 g(t)\,dt=-A_1+A_2=A_2-A_1\underset{(*)}{=}0=G(0).$$

Portanto

$$\boxed{G(2)<G(0)=G(4)=0} \qquad (1)$$

Estimativa para $G(6)$:

$$G(6)=\int_0^6 g(t)\,dt=\int_0^4 g(t)\,dt+\int_4^6 g(t)\,dt=G(4)+(-A_3)=0-A_3=-A_3.$$

Agora, por um lado, multiplicando as desigualdades em (*) por (-1),segue que

$$-A_1=-A_2<-A_3=-A_4<-A_5=-A_6<0 \qquad (**)$$

Portanto

$$\boxed{G(2)<G(6)<0=G(0)=G(4)} \qquad (2)$$

Estimativa para $G(8)$: procedendo como antes,

$$G(8)=\int_0^8 g(t)\,dt=\int_0^6 g(t)\,dt+\int_6^8 g(t)\,dt=G(6)+A_4=-A_3+A_4\underset{(*)}{=}0$$

Portanto

$$\boxed{G(2)<G(6)<0=G(0)=G(4)=G(8)} \qquad (3)$$

Estimativa para $G(10)$:

$$G(10)=\int_0^{10} g(t)\,dt=\int_0^8 g(t)\,dt+\int_8^{10} g(t)\,dt=G(8)+(-A_5)=0-A_5=-A_5$$

Portanto, por (**), segue que

$$\boxed{G(2)<G(6)<G(10)<0=G(0)=G(4)=G(8)} \qquad (4)$$

Estimativa para $G(12)$:

$$G(12)=\int_0^{12} g(t)\,dt=\int_0^{10} g(t)\,dt+\int_{10}^{12} g(t)\,dt=-A_5+A_6\underset{(*)}{=}0$$

Portanto

$$\boxed{G(2) < G(6) < G(10) < 0 = G(0) = G(4) = G(8) = G(12)} \quad (5)$$

(b) Pela primeira forma do T.F.C., segue que $G'(x) = g(x)$, para todo $x \in [0,12]$.
De acordo com o gráfico, tem-se $g(x) > 0$ nos intervalos $(2,4)$, $(6,8)$ e $(10,12)$ e $g(x) < 0$, nos intervalos $(0,2)$, $(4,6)$ e $(8,10)$.
A tabela abaixo apresenta o comportamento do sinal de $G'(x) = g(x)$ e portanto dá a informação sobre crescimento e decrescimento de $G(x)$

Intervalos	$0<x<2$	$2<x<4$	$4<x<6$	$6<x<8$	$8<x<10$	$10<x<12$
$G'(x)=g(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$G(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Assim, a função $G(x)$ é crescente em $(2,4) \cup (6,8) \cup (10,12)$ e é decrescente em $(0,2) \cup (4,6) \cup (8,10)$.

(c) Pelo item anterior e o teste da derivada primeira, temos que $x = 4$ e $x = 8$ são pontos de máximo locais e $x = 2$, $x = 6$ e $x = 10$ são pontos de mínimo locais.
Por outro lado, de (b) segue que G é contínua no intervalo fechado $[0,12]$. Logo segue ainda de (5), no item(a), que $x = 2$ é o ponto de mínimo absoluto e $x = 0$, $x = 4$, $x = 8$ e $x = 12$ são pontos de máximo absolutos.

(d)
Para estudarmos os pontos de inflexão e as mudanças de concavidade no gráfico de $G(x)$, devemos estudar o sinal de $G''(x)$.
Como $G'(x) = g(x)$ e g é derivável no intervalo $(0,12)$, segue que $G''(x) = g'(x)$.
Lembre-se que $g'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $P(x, g(x))$ que, neste caso, é positiva nos intervalos em que g é crescente (vide figura 1.2), e negativa nos intervalos em que g é decrescente (vide figura 1.3).
Assim, a tabela seguinte nos dá o comportamento do sinal de $G''(x)$.

Intervalos	$0<x<1$	$1<x<3$	$3<x<5$	$5<x<7$	$7<x<9$	$9<x<11$	$11<x<12$
$g''(x) = f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
Concavidade do gráfico de g	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

A tabela acima nos diz que existe mudança de concavidade em $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=7$, $x=9$ e $x=11$ e existe reta tangente nos pontos $(1,G(1))$, $(3,G(3))$, $(5,G(5))$, $(7,G(7))$, $(9,G(9))$ e $(11,G(11))$,logo os pontos mencionados são pontos de inflexão e portanto as abscissas dos pontos de inflexão ocorrem em $x=1$, $x=3$, $x=5$, $x=7$, $x=9$ e $x=11$.

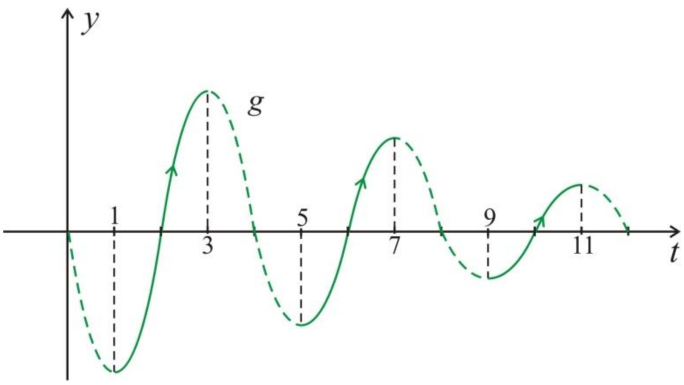

Figura 1.2

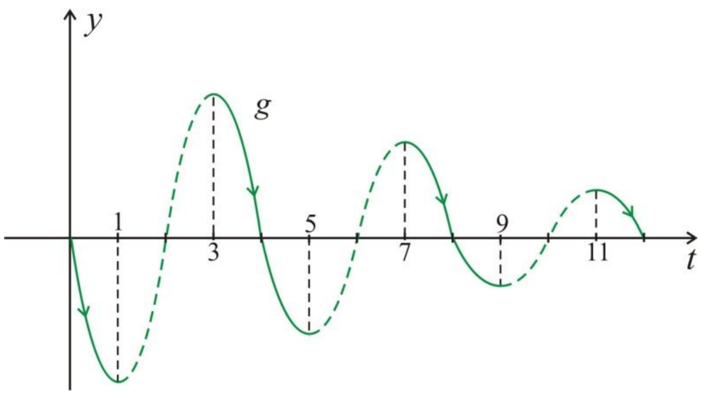

Figura 1.3

(e) A tabela acima nos disse que o gráfico de G tem concavidade para cima em $(1,3)\cup(5,7)\cup(9,11)$ e para baixo em $(0,1)\cup(3,5)\cup(7,9)\cup(11,12)$.

(f) Juntando os dados dos itens anteriores, podemos dar um esboço aproximado do gráfico da função G . O esboço do gráfico é dado na figura 1.4 a seguir:

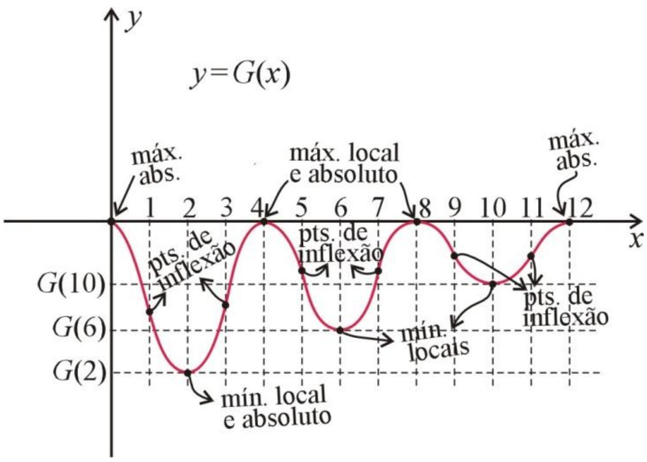

Figura 1.4

Observe que não nos é dada a expressão que define a função g . A única informação que nos é dada no enunciado é que $A_1 = A_2 > A_3 = A_4 > A_5 = A_6 > 0$, o que nos permitiu comparar apenas alguns dos valores de $G(x)$ dados no item (a).

Solução da 2ª Questão

(a) O gráfico da função f é exibido na figura 2.1 a seguir

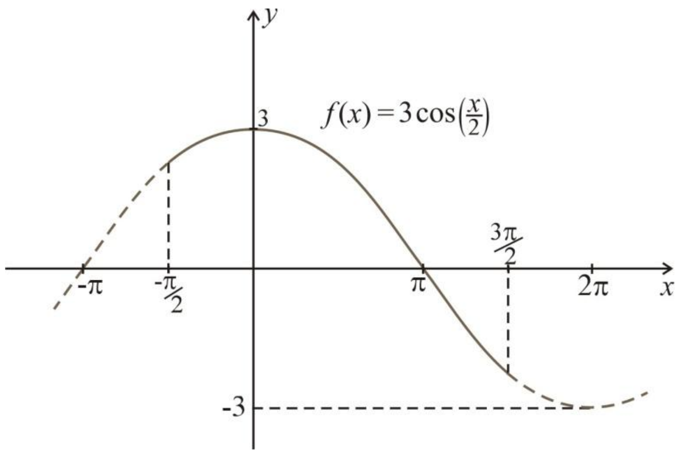

Figura 2.1

Note que

$$\left(sen\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

Logo, função $F(x) = 6\,sen\left(\frac{x}{2}\right)$ tem como derivada

$$F'(x) = 6.\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)\,.$$

Portanto, pelo TFC, temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = F\left(\frac{3\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(6sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) - \left(6sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(6.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-6.\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 6\sqrt{2}$$

(b)

Lembre que $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$ (*)

Como $f(x) > 0$, para $-\frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$ = área da região R_1, vide figura 2.2.

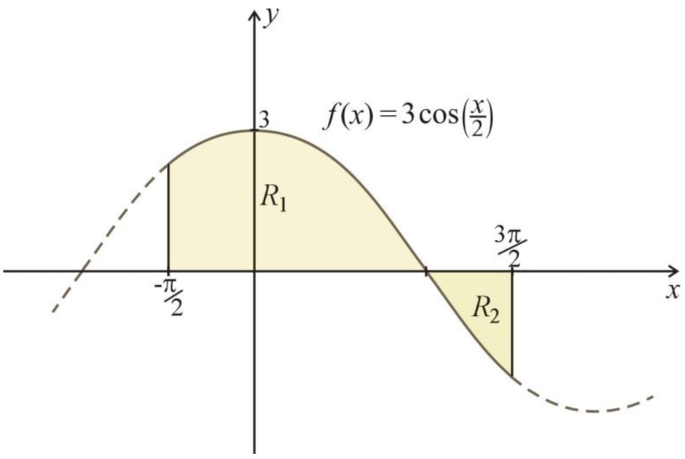

Figura 2.2

Já $f(x) < 0$, para $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$. Neste caso, $\displaystyle\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$ = - (área da região R_2).

Substituindo os valores anteriores em (*) temos que

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \text{(área da região } R_1\text{) - (área da região } R_2\text{)}.$$

Portanto, $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$ representa a diferença entre a área da região R_1 e a da região R_2.

Como este número resultou em $6\sqrt{2} > 0$, tem-se que a área da região R_1 é maior que a da região R_2.

(c) A área da região procurada é a soma das áreas das regiões R_1 e R_2.

Ou seja

área da região = área da região R_1 + área da região R_2

Como visto no item anterior,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx = \text{ área da região } R_1 \quad \text{e} \quad \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \text{ - (área da região } R_2\text{)} \qquad (*)$$

Logo

$$\text{área da região } = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\,dx = \left[F(\pi) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[F(\frac{3\pi}{2}) - F\;\;\pi\;\;\right] =$$

$$\left[6\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - 6\,sen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[6\,sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) - 6\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= 6 + 6\frac{\sqrt{2}}{2} - 6\frac{\sqrt{2}}{2} + 6 = 12$$

Portanto , a área da região é 12 u.a.

Solução da 3ª Questão

(a) Tem-se $F(x) = h(g(x))$, em que $h(x) = \int_1^x f(t)dt$ e $g(x) = x^3 + 3x^2$.

Pela regra da cadeia, tem-se que

$$F'(x) = h'(g(x)).g'(x)$$

Por um lado, segue do TFC que $h'(x) = f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por hipótese. Em particular , $h'(g(x)) = f'(g(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, $g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.

Avaliemos o sinal da derivada $F'(x)$:

Intervalos	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$g'(x) = 3x(x+2)$	$+$	$-$	$+$
$h'(g(x)) = f(g(x))$	$+$	$+$	$+$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Logo, os intervalos de crescimento da função $F(x)$ são $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. $F(x)$ é decrescente em $(-2,0)$.

(b) $H(x) = \int_{sen\,x}^{x^3} \frac{3}{1+t^4}dt = \int_{sen\,x}^{0} \frac{3}{1+t^4}dt + \int_0^{x^3} \frac{3}{1+t^4}dt = -\int_0^{sen\,x} \frac{3}{1+t^4}dt + \int_0^{x^3} \frac{3}{1+t^4}dt = -F(x) + G(x)$ (*)

em que

$$F(x) = h(sen\,x) \quad \text{e} \quad G(x) = h(x^3)\ , \text{ sendo } \ h(x) = \int_0^x \frac{3}{1+t^4}dt$$

Denotemos $f(t) = \dfrac{3}{1+t^4}$. Pelo TFC, $h'(x) = f(x)$.

Pela regra da cadeia:

$$F'(x) = h'(sen\,x).(sen\,x)' = f(sen\,x).\cos x = \frac{3\cos x}{1+sen^4 x}$$

$$G'(x) = h'(x^3).(x^3)' = f(x^3).3x^2 = \frac{9x^2}{1+x^{12}}$$

Por (*), tem-se $H'(x) = -F'(x) + G'(x) \Rightarrow H'(0) = -F'(0) + G'(0) = -\frac{3\cos 0}{1+sen^4 0} + \frac{9.0^2}{1+0^{12}} = -3$

Solução da 4ª Questão

a) Deve-se observar que $x = y^2 - 4y$ é uma parábola e sua concavidade está voltada para a direita. Da mesma forma , $x = 2y - y^2$ é também uma parábola e sua concavidade está voltada para a esquerda. Verifica-se que a interseção das parábolas ocorre nos pontos $(0,0)$ e $(-3,3)$.
A região é esboçada na figura 4.1 a seguir.

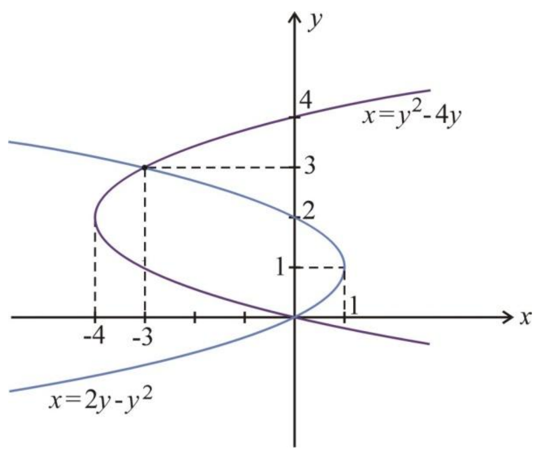

Figura 4.1

b) Para representar a área da região $\mathcal{R}$ em termos de x , precisamos dividi-la em três sub-regiões , como mostra a figura 4.2 a seguir, além de expressar y como função de x .
Ou seja, na parábola $x = y^2 - 4y$, completando quadrado obtemos

$$x = y^2 - 4y + 4 - 4 = (y-2)^2 - 4$$

portanto tem-se $y = 2 \pm \sqrt{4+x}$, o que nos dá os dois ramos da parábola correspondendo às partes em que $y \geq 2$ e $y \leq 2$.
Na parábola $x = 2y - y^2$, completando quadrado obtemos

$$x = 1 - 1 + 2y - y^2 = 1 - (y-1)^2$$

portanto tem-se $y = 1 \pm \sqrt{1-x}$, o que nos dá os dois ramos da parábola correspondendo às partes em que $y \geq 1$ e $y \leq 1$.

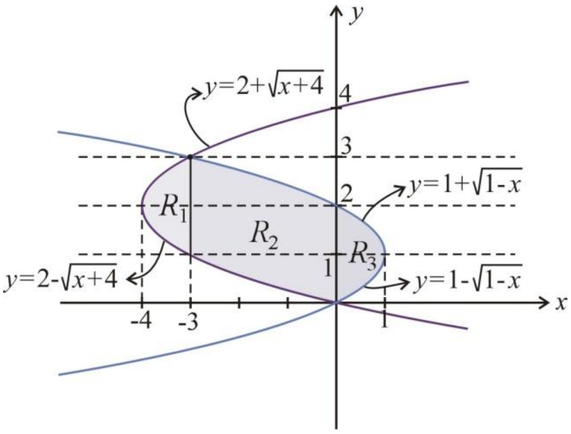

Figura 4.2

$$A(R)=\underbrace{\int_{-4}^{-3}[(2+\sqrt{4+x})-(2-\sqrt{4+x})]dx}_{A(R_1)}+\underbrace{\int_{-3}^{0}[(1+\sqrt{1-x})-(2-\sqrt{4+x})]dx}_{A(R_2)}+\underbrace{\int_{0}^{1}[(1+\sqrt{1-x})-(1-\sqrt{1-x})]dx}_{A(R_3)}$$

c) Neste caso, verificamos que é desnecessário dividir a região, como mostra a figura 4.3 a seguir .

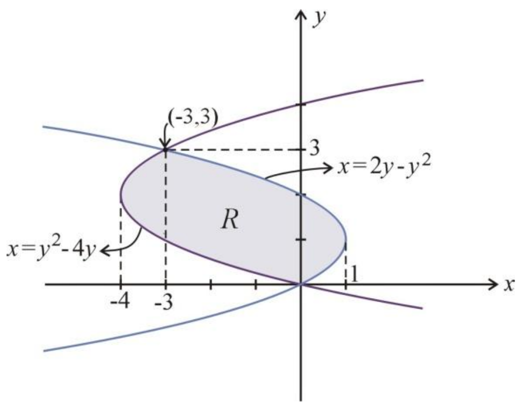

Figura 4.3

Temos portanto:

$$A(R)=\int_0^3[(2y-y^2)-(y^2-4y)]\,dy$$

d) Usando a expressão do item (c) , obtemos:

$$A(R)=\int_0^3[(2y-y^2)-(y^2-4y)]\,dy=\int_0^3(6y-2y^2)\,dy=\left[3y^2-\frac{2y^3}{3}\right]_0^3=\left[3.3^2-\frac{2.3^3}{3}\right]-\left[3.0^2-\frac{2.0^3}{3}\right]=9$$

ou seja, $A(R)=9$ u.a.

Solução da 5ª Questão

a) A figura 5.1 ilustra a região considerada, com a reta $x = a$ que deve dividir a região em duas partes iguais.

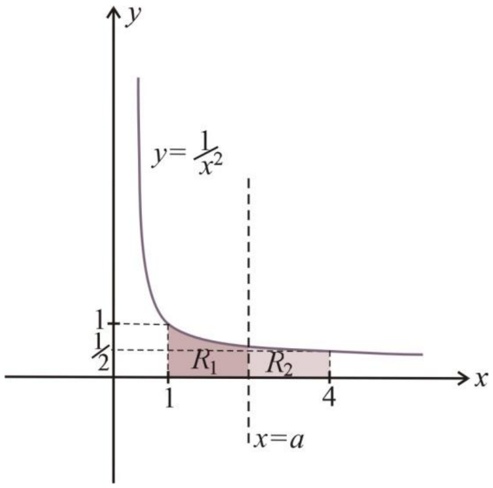

Figura 5.1 **MUDAR**

Denotando por $A_1 = área(R_1)$ e $A_2 = área(R_2)$, temos que $A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^2}dx$ e $A_2 = \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx$

Uma vez que $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$, segue do TFC que

$$A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_1^a = -\frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad A_2 = \int_a^4 \frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)_a^4 = \left(-\frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \ .$$

Como queremos $A_1 = A_2$, devemos ter $1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{a} - \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{2}{a} = \frac{5}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{8}{5}}$

<u>**Obs.:**</u> note que a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{x^2}$ para $1 \le x \le 4$ é $A = A_1 + A_2 = \left(1 - \frac{5}{8}\right) + \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}$

b) As figuras 5.2 e 5.3 ilustram a região considerada, com a reta $y = b$ que deve dividir a região em duas partes iguais., em cada caso $b > \frac{1}{2}$ e $b < \frac{1}{2}$, respectivamente.

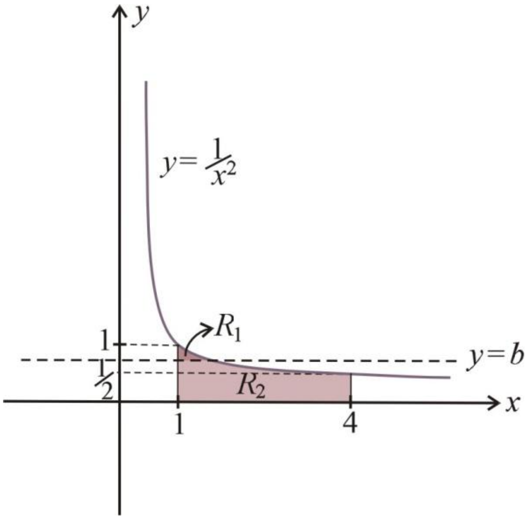

Figura 5.2

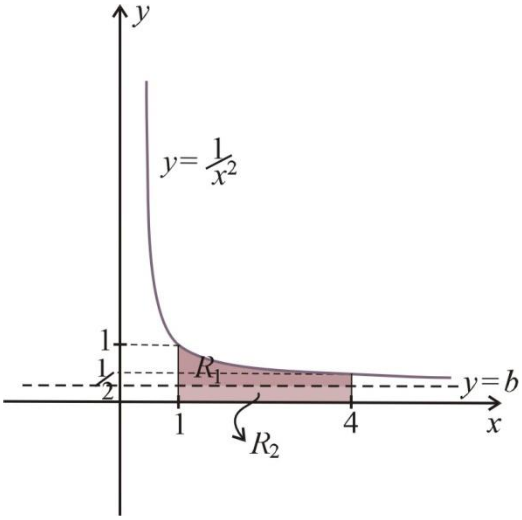

Figura 5.3

Notemos inicialmente que não pode ocorrer o caso $b > \frac{1}{2}$.

De fato, neste caso, a região R_2 conteria um retângulo de base 4 e altura $\frac{1}{2}$, como ilustra a figura 5.2, assim sua área seria maior que a área deste retângulo , ou seja , teríamos $A_2 > 4.\frac{1}{2} = 2$.

Entretanto, pelo item anterior, a área da região abaixo do gráfico é $A = \frac{3}{4} < 2$, portanto não pode ser $b > \frac{1}{2}$.

Suponhamos então que $b < \frac{1}{2}$.

Neste caso, tem-se $A_2 = 4b$ e queremos, usando o item (a), $A_2 = \frac{A}{2} = \frac{3}{8}$, ou seja ,

$$4b = \frac{3}{8} \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{32}}$$