Consórcio cederj
Fundação CECIERJ
Fundação Centro de Ciências e Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro

AP1– Equações Diferenciais – 2010/2

Soluções!

Questão 1 [2,5 pts]

a) Calcule o valor de k de modo que $y = kx$ seja solução da equação de Riccati

$$2y' - (y/x)^2 - 1 = 0; \qquad x > 0. \tag{1}$$

b) Utilizando o valor de k calculado no item anterior, e a técnica de solução de equações de Riccati, obtenha a solução geral de (1).

Soluções:

a)

$$\begin{aligned} y = kx \text{ é uma solução de } (1) &\iff 2(kx)' - (kx/x)^2 - 1 = 0 \\ &\iff 2k - k^2 - 1 = 0 \\ &\iff k^2 - 2k + 1 = 0 \\ &\iff (k-1)^2 = 0 \\ &\iff k = 1. \end{aligned}$$

Portanto o valor de k para o qual $y = kx$ é solução de (1) é $k = 1$, ou seja, a solução é $y = x$.

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

---

b) Em primeiro lugar escrevemos a equação (1) na forma

$$y' + \left(-\frac{1}{2x^2}\right) y^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \tag{2}$$

Daí podemos identificar (2) como uma equacão de Riccati.
De acordo com o método de resolução de equações de Riccati, fazemos $y = x + \dfrac{1}{z}$, de modo que

$$y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \tag{3}$$

e

$$y^2 = x^2 + 2\,\frac{x}{z}\; + \frac{1}{z^2}. \tag{4}$$

Substituindo (3) e (4) em (2), obtemos

$$1 - \frac{z'}{z^2} - \frac{1}{2x^2}\left(x^2 + 2\,\frac{x}{z}\; + \frac{1}{z^2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Smplificando esta última equação, chegamos a

$$z' + \frac{1}{x}\,z = -\frac{1}{2x^2}. \tag{5}$$

$\boxed{1{,}0 \text{ pt}}$

A solução geral de (5) (na variável z) é

$$\begin{aligned}
z &= e^{-\int (1/x)\,dx}\left[\int e^{\int (1/x)\,dx}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\,dx - \tilde{c}\right] \\
&= \frac{1}{x}\left(\int x\left(-\frac{1}{2x^2}\right)\,dx - \tilde{c}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\,ln\,x - \tilde{c}\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(-\frac{1}{2}\,ln\,x - ln\,c\right) \\
&= -\frac{1}{x}\,(ln\,c\sqrt{x})
\end{aligned}$$

De onde, a solução geral na variável y é

$$y = x - \frac{x}{ln\,c\sqrt{x}}\;.$$

$\boxed{1{,}0 \text{ pt}}$

Questão 2 [2,5 pts]

a) Mostre que a equação

$$y' - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{1}{2}, \qquad x > 0, \tag{6}$$

é uma equação de coeficientes homogêneos
b) Utilizando a técnica de solução de equações de coeficientes homogêneos, calcule a solucão geral de (6)
Soluções:
a) Podemos reescrever a equação (6) como

$$-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]+y'=0,$$

e a identificamos como sendo da forma $M(x,y)+N(x,y)\,y'=0$, com

$$M(x,y)=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right] \quad \text{e} \quad N(x,y)\equiv 1.$$

Agora, para todo $t>0$,

$$M(tx,ty)=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{ty}{tx}\right)^2+1\right]=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right]=M(x,y)=t^0\,M(x,y)$$

e

$$N(tx,ty)=1=N(x,y)=t^0\,N(x,y);$$

de maneira que M e N são funções homogêneas de mesmo grau, e consequentemente (6) é uma equação de coeficientes homogêneos.

0,5pt

b) Façamos a mudança de variáveis $y=v/x$. Então $y'=v+cxv'$. Substituindo em (6), obtemos :

$$2v+2xv'-v^2-1=0,$$

i.é,

$$2xv'=v^2-2v+1,$$

ou ainda

$$\frac{v'}{(v-1)^2}=\frac{1}{2x}. \tag{7}$$

Neste ponto, temos duas possibilidades: ou $v=1$, ou $v\neq 1$.

$$v=1 \iff y=x,$$

e é imediato constatar que $y=x$ é uma solução de (6).

0,5pt

Se $v \neq 1$, então a solução da equação separada (7) é (verifique!):

$$-\frac{1}{v-1} = \frac{1}{2}\,ln\,x + \underbrace{k}_{ln\,c} = ln\,c\,\sqrt{x}.$$

ou ainda

$$-\frac{x}{y-x} = ln\,c\,\sqrt{x}. \tag{8}$$

A equação (8) define implicitamente as soluções de (6), exceto $y = x$,

Obs: Você pode constatar que, tirando o valor de y na equação (8), obtemos $y = x - \frac{x}{ln\,c\,\sqrt{x}}$; o que já era de se esperar.

$\boxed{1{,}5 \text{ pt}}$

Questão 3 [2,5 pts]

Calcule a solução contínua da equação

$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = h(x),$$

onde

$$h(x) = \begin{cases} x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

satisfazendo a condição $y(1) = 2$.

Solução:

O segundo membro da equação é uma função descontínua. para resolver este poblema, vamos dividi- lo em duas partes:

$$I : \begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = x; \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad II : \begin{cases} y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = 0; \;\; x \geq 2 \\ y(2) = \alpha \end{cases}$$

onde α é um valor a ser determinado de tal modo que a solução global seja contínua.

$\boxed{0{,}5 \text{ pt}}$

I: Temos

$$y'(x) + \frac{1}{x}\,y(x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad y(x) = e^{-\int (1/x)\,dx}\left[\int e^{\int (1/x)\,dx}\cdot x\,dx\right]$$

$$\Longleftrightarrow \quad y(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$$

Impondo a condição inicial, $y(1) = 2$, calcula-se $c = \dfrac{5}{3}$.

A solução do problema I é

$$y_1(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + \frac{5}{x}\right); \quad 1 \le x \le 2. \tag{9}$$

0,75 pt

A solução geral da equação do problema II é

$$y(x) = c\,e^{-\int (1/x)\,dx} = \frac{c}{x}$$

Impondo a condição inicial $y(2) = \alpha$, obtemos

$$y_2(2) = \alpha = \frac{c}{2} \tag{10}$$

0,75 pt

A fim de que a justaposição das soluções (9) e (10) seja contínua, devemos ter

$$\lim_{x\to 2^+} y_1(x) = \lim_{x\to 2^-} y_2(x).$$

Isto é, devemos ter

$$\frac{13}{6} = \frac{c}{2}.$$

Então $c = \dfrac{13}{3}$ e a solução contínua do problema proposto é

$$y(x) = \begin{cases} (1/3)\,(x^2 + (5/x)) & 1 \le x \le 2, \\ (13)/(3x), \quad x > 2. \end{cases}$$

0,5 pt

Questão 4 [2,5 pts]
Determine um fator integrante para a equação

$$y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$$

e - a seguir - calcule sua solução geral .
Solução:
Sejam

$$M(x,y) = y \qquad \text{e} \qquad N(x,y) = 2xy - e^{-2y}.$$

Temos $M_y = 1$, $N_x = 2y$, de modo que $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{2y-1}{y}$ e a equação possui fator integrante $\mu(y) = e^{\int (2-1/y)\,dy} = e^{2y}/y$.

Obs: Claramente estamos supondo $y \neq 0$. Devesmos então investigar o que ocorre quando $y = 0$. É fácil constatar que $y \equiv 0$ é uma solução da equação proposta.

$\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

Multiplicando a equação original, $y + (2xy - e^{-2y})y' = 0$, pelo fator integrante e^{2y}/y, obtemos a equacão exata

$$e^{2y} + \left(2xe^{2y} - \frac{1}{y}\right) y' = 0.$$

Então, existe uma funcão $\varphi(x,y)$ tal que

$$\varphi_x(x,y) = e^{2y} \tag{11}$$

e

$$\varphi_y = 2xe^{2y} - 1/y \tag{12}$$

$\boxed{0{,}75 \text{ pt}}$

Integrando (11) com relação a x, obtemos

$$\varphi(x,y) = xe^{2y} + h(y) \tag{13}$$

Derivando (13) com relação a y e igualando o resultado a (12), concluímos que $h'(y) = -1/y$. de onde $h(y) = -ln\, y$.
Assim, $\varphi(x,y) = xe^{2y} - ln\, y$, e a família de curvas

$$xe^{2y} - ln\, y = c$$

define implicitamente as solucões (distintas de $y \equiv 0$) da equação dada.

$\boxed{1{,}0 \text{ pt}}$