Fundação CECIERJ – Vice Presidência de Educação Superior a Distância

Cálculo II – AD1 (2012/2) – Gabarito

Solução da 1ª Questão

Considere a figura 1.1 abaixo , representando o mesmo gráfico dado no enunciado

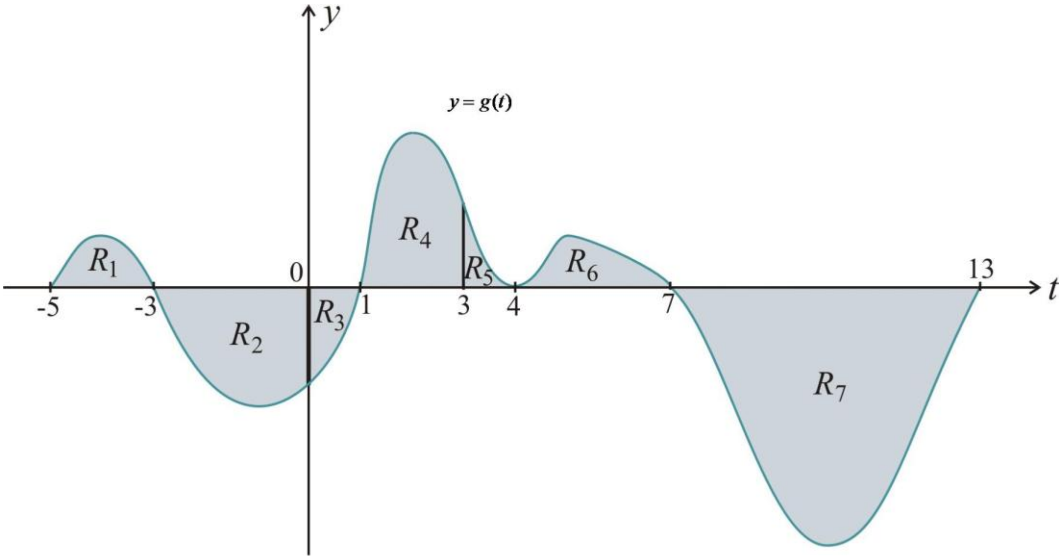

Figura 1.1

Denotemos por
$A_1 = área(R_1)$, $A_2 = área(R_2)$, $A_3 = área(R_3)$, $A_4 = área(R_4)$, $A_5 = área(R_5)$, $A_6 = área(R_6)$ e $A_7 = área(R_7)$.

De acordo com os dados do enunciado, a figura naturalmente nos dá que:

$$A_1 = 3,\ A_2 = 6,\ A_3 = 1,\ A_4 = 7,\ A_5 = 2,\ A_6 = 1 \text{ e } A_7 = 15$$

a) Por definição $\boxed{G(-5) = \int_{-5}^{-5} g(t)\,dt = 0}$, como visto no caderno didático, uma vez que os extremos de integração são os mesmos, ambos iguais a -5 e g esta definida em $t = -5$.

Pela definição 2.2 do caderno didático, tem-se:

$A_1 = \int_{-5}^{-3} g(t)\,dt$, $A_2 = -\int_{-3}^{0} g(t)\,dt$, $A_3 = -\int_{0}^{1} g(t)\,dt$, $A_4 = \int_{1}^{3} g(t)\,dt$, $A_5 = \int_{3}^{4} g(t)\,dt$, $A_6 = \int_{4}^{7} g(t)\,dt$ e $A_7 = -\int_{7}^{13} g(t)\,dt$.

Cálculo de $G(-3)$:

Por definição: $G(-3) = \int_{-5}^{-3} g(t)\,dt = A_1 = 3$, isto é , $\boxed{G(-3) = 3}$

Cálculo de $G(0)$:

Novamente, usando a definição , a proposição 2.2 do caderno didático e (*), obtemos:

$$G(0) = \int_{-5}^{0} g(t)\,dt = \int_{-5}^{-3} g(t)\,dt + \int_{-3}^{0} g(t)\,dt = A_1 + (-A_2) = 3 - 6 = -3 .$$

Portanto

$$\boxed{G(0) = -3}$$

Cálculo de $G(1)$:

$$G(1) = \int_{-5}^{1} g(t)\,dt = \int_{-5}^{0} g(t)\,dt + \int_{0}^{1} g(t)\,dt = G(0) + (-A_3) = -3 - 1 = -4 .$$

Portanto

$$\boxed{G(1) = -4}$$

Cálculo de $G(3)$: procedendo como antes,

$$G(3) = \int_{-5}^{3} g(t)\,dt = \int_{-5}^{1} g(t)\,dt + \int_{1}^{3} g(t)\,dt = G(1) + A_4 = -4 + 7 = 3$$

Portanto

$$\boxed{G(3) = 3}$$

Cálculo de $G(4)$:

$$G(4) = \int_{-5}^{4} g(t)\,dt = \int_{-5}^{3} g(t)\,dt + \int_{3}^{4} g(t)\,dt = G(3) + A_5 = 3 + 2 = 5$$

Portanto

$$\boxed{G(4) = 5}$$

Cálculo de $G(7)$:

$$G(7)=\int_{-5}^{7} g(t)\,dt=\int_{-5}^{4} g(t)\,dt+\int_{4}^{7} g(t)\,dt=G(4)+A_6=5+1=6$$

Portanto

$$\boxed{G(7)=6}$$

Cálculo de $G(13)$:

$$G(13)=\int_{-5}^{13} g(t)\,dt=\int_{-5}^{7} g(t)\,dt+\int_{7}^{13} g(t)\,dt=G(7)+(-A_7)=6-15=-9$$

Portanto

$$\boxed{G(13)=-9}$$

(b) Pela primeira forma do T.F.C., segue que $G'(x)=g(x)$, para todo $x\in(-5,13)$.
De acordo com o gráfico, tem-se $g(x)>0$ nos intervalos $(-5,-3)$, $(1,4)$ e $(4,7)$ e $g(x)<0$, nos intervalos $(-3,1)$ e $(7,13)$.
A tabela abaixo apresenta o comportamento do sinal de $G'(x)=g(x)$ e portanto dá a informação sobre crescimento e decrescimento de $G(x)$

Intervalos	$-5<x<-3$	$-3<x<1$	$1<x<4$	$4<x<7$	$7<x<13$
$G'(x)=g(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$	$-$
$G(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Assim, a função $G(x)$ é crescente em $[-5,-3]\cup[1,7]$ e é decrescente em $[-3,1]\cup[7,13]$.

(c) Pelo item anterior e o teste da derivada primeira, temos que $x=-3$ e $x=7$ são pontos de máximo locais e $x=1$ é ponto de mínimo local.
Por outro lado, de (b) segue que G é contínua no intervalo fechado $[-5,13]$. Logo , comparando os valores obtidos no item (a) , segue que $x=13$ é o ponto de mínimo absoluto e $x=7$ é ponto de máximo absoluto.

(d)
Para estudarmos os pontos de inflexão e as mudanças de concavidade no gráfico de $G(x)$, devemos estudar o sinal de $G''(x)$.
Como $G'(x)=g(x)$ e g é derivável no intervalo $(-5,13)$, segue que $G''(x)=g'(x)$.
Lembre-se que $g'(x)$ representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto $P(x,g(x))$ que, neste caso, é positiva nos intervalos em que g é crescente (vide figura 1.2), e negativa nos intervalos em que g é decrescente (vide figura 1.3).
Assim, a tabela seguinte nos dá o comportamento do sinal de $G''(x)$.

Intervalos	$-5<x<-4$	$-4<x<-1$	$-1<x<2$	$2<x<4$	$4<x<5$	$5<x<10$	$10<x<13$
$g''(x)=f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
Concavidade do gráfico de g	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

A tabela anterior nos diz que existe mudança de concavidade em $x=-4$, $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=5$ e $x=10$ e existe reta tangente nos pontos $(-4,G(-4))$, $(-1,G(-1))$, $(2,G(2))$, $(4,G(4))$, $(5,G(5))$ e $(10,G(10))$, logo os pontos mencionados são pontos de inflexão e portanto as abscissas dos pontos de inflexão ocorrem em $x=-4$, $x=-1$, $x=2$, $x=4$, $x=5$ e $x=10$.

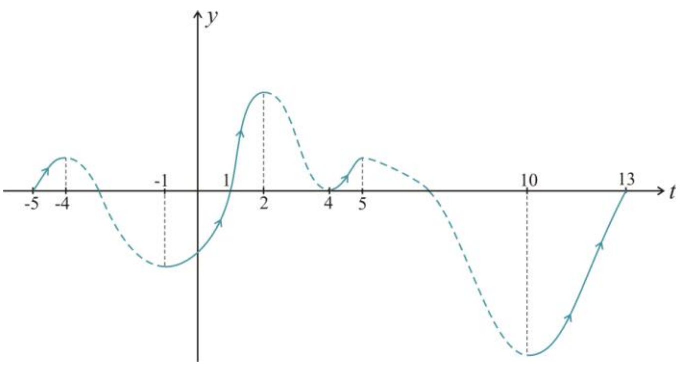

Figura 1.2

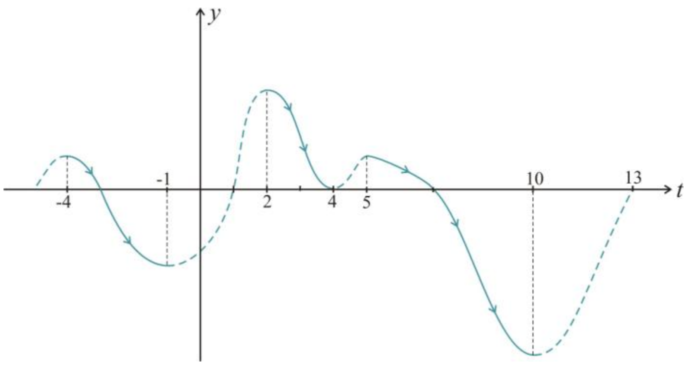

Figura 1.3

(e) A tabela acima nos disse que o gráfico de G tem concavidade para cima em $(-5,-4)\cup(-1,2)\cup(4,5)\cup(10,13)$ e para baixo em $(-4,-1)\cup(2,4)\cup(5,10)$.

(f) Juntando os dados dos itens anteriores, podemos dar um esboço aproximado do gráfico da função G. O esboço do gráfico é dado na figura 1.4 a seguir:

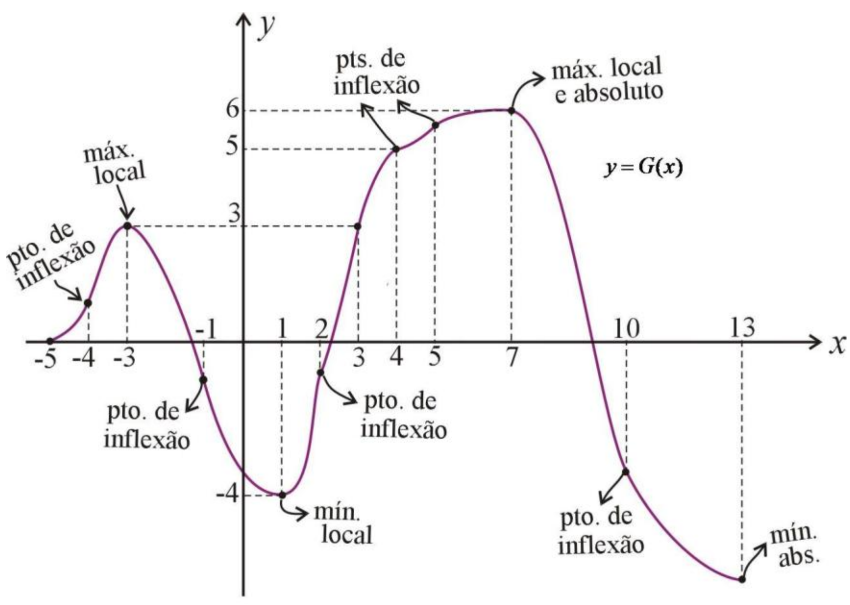

Figura 1.4

Observe que não nos é dada a expressão que define a função g. A única informação que nos é dada no enunciado são os valores das áreas $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ e A_7, o que nos permitiu calcular apenas alguns dos valores de $G(x)$ dados no item (a). Por exemplo, não sabemos se $G(-1)$, $G(2)$ e $G(10)$ são de fato negativos como indicados na figura 1.4. Entretanto o esboço dado na figura é uma aproximação para o gráfico da função $G(x)$ respeitando as informações de crescimento e concavidade que o gráfico real deve possuir.

Solução da 2ª Questão

O gráfico da função f é o mostrado na figura 2.1 a seguir:

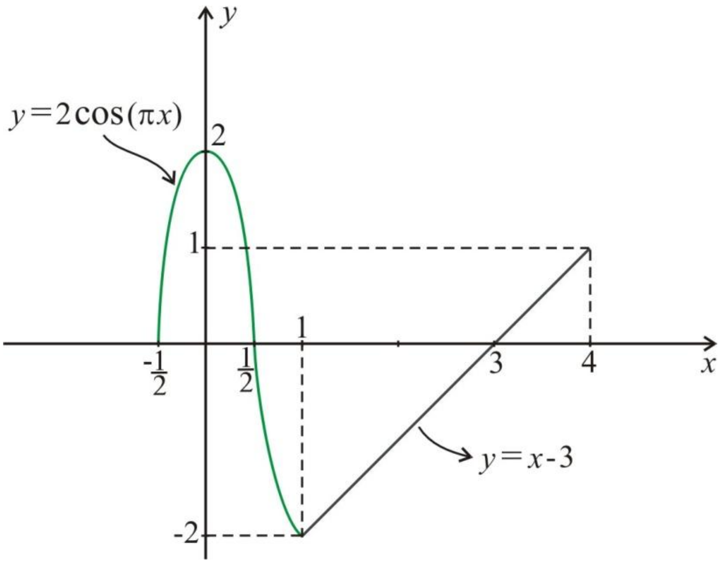

Figura 2.1

(a) Como a função f tem expressões diferentes nos intervalos consecutivos $[-\frac{1}{2},1]$ e $[1,4]$, devemos usar a proposição 2.2 do caderno didático para obter:

$$\int_{-1/2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx \qquad (1)$$

Usando as expressões da função f em cada um dos intervalos e substituindo em (1), temos:

$$\int_{-1/2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1} 2\cos(\pi x)\,dx + \int_{1}^{4}(x-3)\,dx \overset{T.F.C.}{=} \left[\frac{2sen(\pi x)}{\pi}\right]_{-1/2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{1}^{4} =$$

$$=\left[\left(\frac{2sen(\pi)}{\pi}\right)-\left(\frac{2sen(-\pi/2)}{\pi}\right)\right]+\left[\left(\frac{4^2}{2}-3.4\right)-\left(\frac{1^2}{2}-3.1\right)\right]=$$

$$=\left[0-\left(\frac{-2}{\pi}\right)\right]+\left[\;8-12\;-\left(\frac{1}{2}-3\right)\right]=\frac{2}{\pi}-\frac{3}{2}$$

(**Obs.:** note que $\pi > 3 \Rightarrow \frac{2}{\pi} < \frac{2}{3} < 1 < \frac{3}{2}$, donde $\frac{2}{\pi} - \frac{3}{2} < 0$ e a integral acima é negativa.)

(b) Analisando-se o gráfico da figura 2.1, percebe-se que $f(x) \geq 0$ em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ e $[3,4]$, e $f(x) \leq 0$ em $[\frac{1}{2}, 3]$.

Sejam R_1, R_2 e R_3 as regiões representadas no gráfico a seguir

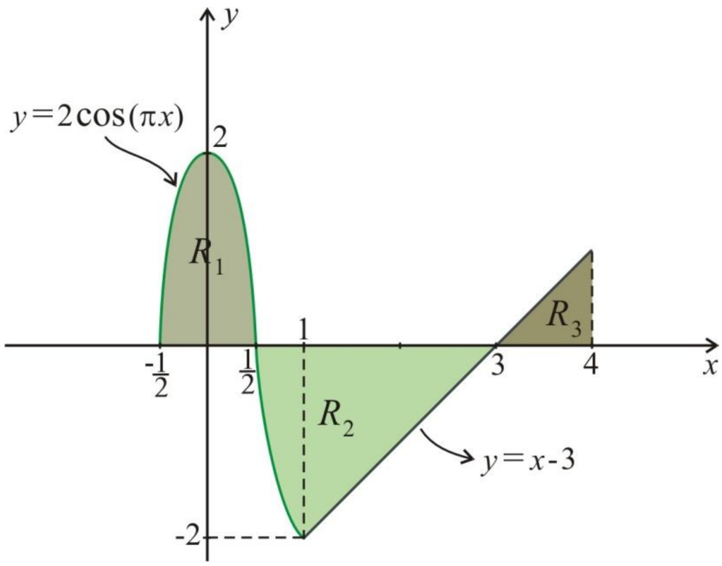

Figura 2.2

De acordo com a definição 2.2 do caderno didático (vide também EP1), tem-se que:

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = A(R_1) \;,\; \int_{1/2}^{3} f(x)\,dx = -A(R_2) \quad \text{e} \quad \int_{3}^{4} f(x)\,dx = A(R_3) \qquad (2)$$

Agora , pela proposição 2.2 do caderno didático vale a seguinte propriedade da integral definida:

$$\int_{-1/2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^{3} f(x)\,dx + \int_{3}^{4} f(x)\,dx \qquad (3)$$

Substituindo agora (2) em (3), tem-se:

$\int_{-1/2}^{4} f(x)\,dx = A(R_1) + (-A(R_2)) + A(R_3)$ ou ainda $\int_{-1/2}^{4} f(x)\,dx = (A(R_1) + A(R_3)) - A(R_2)$.

Ou seja, a integral definida dada no item anterior representa uma diferença de áreas . Mais especificamente, é a soma das áreas das regiões sob o gráfico de f e acima do eixo ($A(R_1) + A(R_3)$) menos a área da região sobre o gráfico de f e abaixo do eixo x ($A(R_2)$).

Como no item anterior vimos que esse valor é negativo (a saber $\frac{2}{\pi}-\frac{3}{2}<0$), isto significa que a área da região R_2 é maior que a soma das áreas das regiões R_1 e R_3.

(c) A área total delimitada pelo gráfico da função f , pelo eixo x e as retas $x=-\frac{1}{2}$ e $x=4$ é dada por:

$$A_T = A(R_1)+A(R_2)+A(R_3)$$

O que, de acordo com (2), nos dá:

$$A_T = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx + \left(-\int_{1/2}^{3} f(x)\,dx\right) + \int_{3}^{4} f(x)\,dx$$, ou seja ,

$$A_T = \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx}_{(I)} - \underbrace{\int_{1/2}^{3} f(x)\,dx}_{(II)} + \underbrace{\int_{3}^{4} f(x)\,dx}_{(III)} \qquad (4)$$

Cálculo de (*I*): No intervalo $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, tem-se $f(x)=2\cos(\pi x)$, logo:

$$\int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,dx = \int_{-1/2}^{1/2} 2\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{2sen(\pi x)}{\pi}\right]_{-1/2}^{1/2} = \left[\left(\frac{2sen(\pi/2)}{\pi}\right)-\left(\frac{2sen(-\pi/2)}{\pi}\right)\right] = \frac{4}{\pi} \qquad (5)$$

Cálculo de (*II*): No intervalo $[\frac{1}{2},3]$, tem-se $f(x)=\begin{cases} 2\cos(\pi x),\ se -\frac{1}{2}\le x\le 1 \\ x-3,\ se\, 1\le x\le 3 \end{cases}$.

Usando a proposição 2.2 do caderno didático e substituindo os valores correspondentes a cada intervalo da função, temos

$$\int_{1/2}^{3} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1/2}^{1} 2\cos(\pi x)dx + \int_{1}^{3}(x-3)\,dx$$
$$= \left[\frac{2sen(\pi x)}{\pi}\right]_{1/2}^{1} + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_{1}^{3} = \left[\left(\frac{2sen(\pi)}{\pi}\right)-\left(\frac{2sen(\pi/2)}{\pi}\right)\right] + \left[\left(\frac{3^2}{2}-3.3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-3.1\right)\right] \qquad (6)$$
$$= -\frac{2}{\pi}+\left[\left(-\frac{9}{2}\right)-\left(-\frac{5}{2}\right)\right] = -\frac{2}{\pi}-2$$

Cálculo de (*III*): No intervalo $[3,4]$, tem-se $f(x)=x-3$, logo:

$$\int_3^4 f(x)\,dx = \int_3^4 (x-3)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - 3x\right]_3^4 = \left[\left(\frac{4^2}{2} - 3.4\right) - \left(\frac{3^2}{2} - 3.3\right)\right] = \frac{1}{2} \qquad (7)$$

Substituindo (5), (6), e (7) em (4) temos que:

$$A_T = \frac{4}{\pi} - \left(-\frac{2}{\pi} - 2\right) + \frac{1}{2} = \frac{6}{\pi} + \frac{5}{2} = \frac{12+5\pi}{2\pi}$$

Solução da 3ª Questão

(a) Tem-se $F(x) = h(g(x))$, em que $h(x) = \int_1^x f(t)dt$ e $g(x) = x^3 + 3x^2$.

Pela regra da cadeia, tem-se que

$$F'(x) = h'(g(x)).g'(x)$$

Por um lado, segue do TFC que $h'(x) = f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por hipótese. Em particular , $h'(g(x)) = f(g(x)) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$, pois $f(t) > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, por hipótese.
Por outro lado, $g'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.
Avaliemos o sinal da derivada $F'(x)$:

Intervalos	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$x > 0$
$g'(x) = 3x(x+2)$	$+$	$-$	$+$
$h'(g(x)) = f(g(x))$	$+$	$+$	$+$
$F'(x)$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Logo, os intervalos em que $F(x)$ é crescente são $(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$. $F(x)$ é decrescente em $(-2,0)$.

(b) Sendo $F(x) = \int_0^x \left(\int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\, du \right) dt$, queremos calcular $F''(x)$.

Fazendo $f(t) = \int_1^{\operatorname{sen} t} \sqrt{1+u^4}\, du$, podemos reescrever $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

Assim, segue do TFC que

$$F'(x) = f(x)$$

Procedendo como no item anterior, usando a regra da cadeia segue que

$$f'(t) = (sen\,t)'.\sqrt{1+(sen\,t)^4} \Rightarrow f'(t) = \cos t.\sqrt{1+sen^4\,t}$$

Logo

$$F''(x) = f'(x) = \cos x.\sqrt{1+sen^4\,x}$$

Solução da 4ª Questão

a) Deve-se observar que $y = x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ é uma parábola e sua concavidade está voltada para cima. Por outro lado, $y = 1 - \frac{1}{x}$ é uma hipérbole com concavidade para baixo. Verifica-se que a interseção dos gráficos ocorre nos pontos $(\frac{1}{2}, -1)$ e $(2, \frac{1}{2})$.
A região é esboçada na figura 4.1 a seguir.

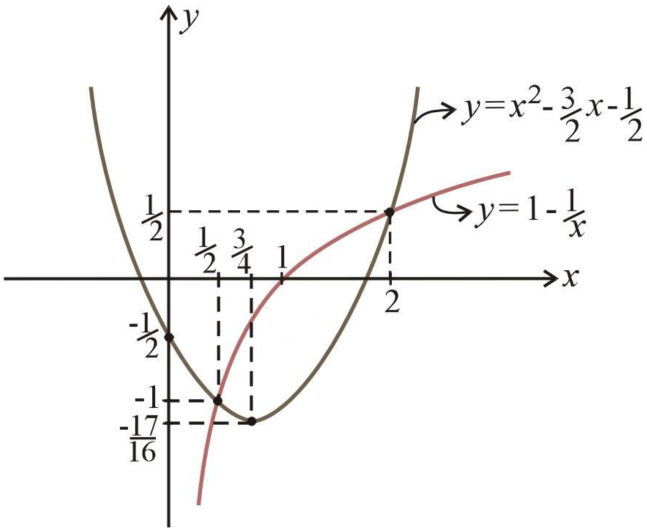

Figura 4.1

b) Para representar a área da região $\mathcal{R}$ em termos de x , fazemos:

$$A(R) = \int_{\frac{1}{2}}^{2} [(1-\frac{1}{x}) - (x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2})]\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} (\frac{3}{2} - \frac{1}{x} - x^2 + \frac{3}{2}x)\,dx$$

A região é mostrada na figura 4.2 a seguir:

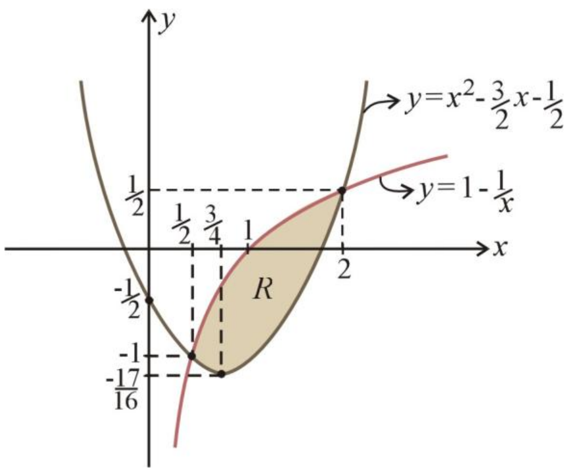

Figura 4.2

c) Para representar a área da região $\mathcal{R}$ em termos de y , precisamos dividi-la em duas sub-regiões , como mostra a figura 4.3 a seguir, além de expressar x como função de y .

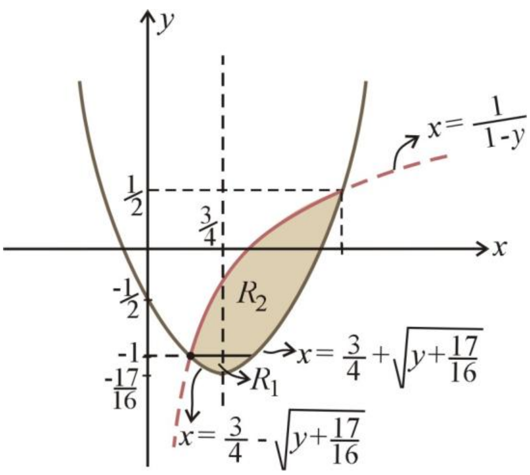

Figura 4.3

Ou seja, na parábola $y=x^2-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$, completando quadrado obtemos

$$y=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}=(x-\frac{3}{4})^2-\frac{17}{16},$$

portanto tem-se $x=\dfrac{3}{4}\pm\sqrt{y+\dfrac{17}{16}}$, o que nos dá os dois ramos da parábola correspondendo às partes em que $x\geq\dfrac{3}{4}$ e $x\leq\dfrac{3}{4}$.

Na hipérbole $y=1-\dfrac{1}{x}$, isolando x fica $x=\dfrac{1}{1-y}$.

Assim

$$A(R)=\underbrace{\int_{-\frac{17}{16}}^{-1}[(\frac{3}{4}+\sqrt{y+\frac{17}{16}})-(\frac{3}{4}-\sqrt{y+\frac{17}{16}})]\,dy}_{A(R_1)}+\underbrace{\int_{-1}^{\frac{1}{2}}[(\frac{3}{4}+\sqrt{y+\frac{17}{16}})-(\frac{1}{1-y})]\,dx}_{A(R_2)}$$

d) Usando a expressão do item (b) , obtemos:

$$A(R)=\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{3}{2}-\frac{1}{x}-x^2+\frac{3}{2}x)\,dx=\left[\frac{3}{2}x-\ln x-\frac{x^3}{3}+\frac{3x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}=\left[3-\ln 2-\frac{8}{3}+3\right]-\left[\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}-\frac{1}{24}+\frac{3}{16}\right]=\frac{39}{16}-\ln 4$$

ou seja, $A(R)=\dfrac{39}{16}-\ln 4$ u.a.

Solução da 5ª Questão

a) A área total abaixo da curva é representada na figura 5.1 e é dada por

$$A=\int_1^5\frac{1}{x^3}\,dx$$

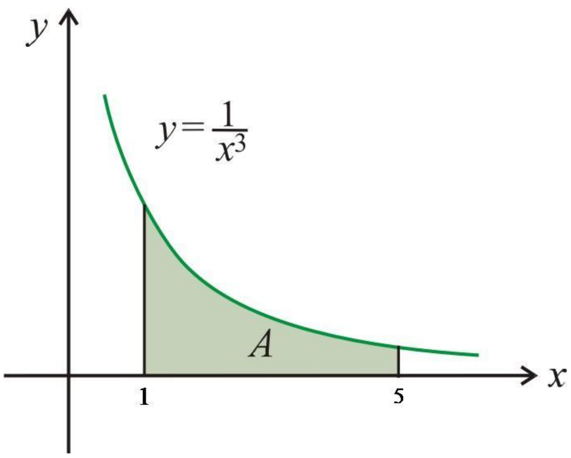

Figura 5.1

Uma vez que $\left(-\dfrac{1}{2x^2}\right)'=\dfrac{1}{x^3}$, segue do TFC que

$$A=\int_1^5\frac{1}{x^3}\,dx=\left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^5=-\frac{1}{2.5^2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{12}{25} \qquad (*)$$

A figura 5.2 ilustra a região considerada, com a reta $x = a$ que deve dividir a região como pede o enunciado.

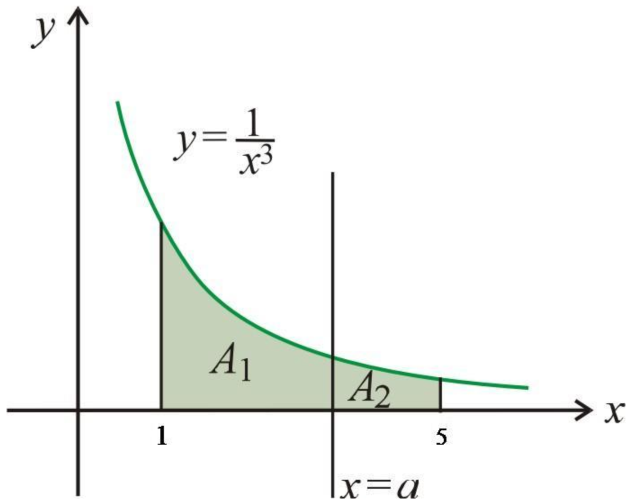

Figura 5.2

Denotando por $A_1 = área(R_1)$ e $A_2 = área(R_2)$, o enunciado pede que $A_1 = 5A_2$.

Como $A = A_1 + A_2$, então $A = A_1 + \frac{A_1}{5} = \frac{6A_1}{5}$ ou $A = 5A_2 + A_2 = 6A_2 \Rightarrow A_1 = \frac{2}{5}$ e $A_2 = \frac{2}{25}$, por (*).

Mas por definição: $A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^3}dx$ e $A_2 = \int_a^5 \frac{1}{x^3}dx$

Assim, usando A_1, por exemplo, temos que

$$\frac{2}{5} = \int_1^a \frac{1}{x^3}dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^a = -\frac{1}{2a^2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2a^2} \Rightarrow \frac{1}{2a^2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{5}}\quad .$$

b) A figura 5.3 a seguir ilustra a situação desejada em que se deseja $11A_1 = A_2$, logo como no raciocínio anterior obtemos $12A_1 \overset{(*)}{=} \frac{12}{25} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{25}$.

Mas $A_1 = \int_1^b \frac{1}{x^3}dx = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)_1^b = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} = \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{2b^2} = \frac{23}{50} \Rightarrow \boxed{b = \frac{5}{\sqrt{23}}}$

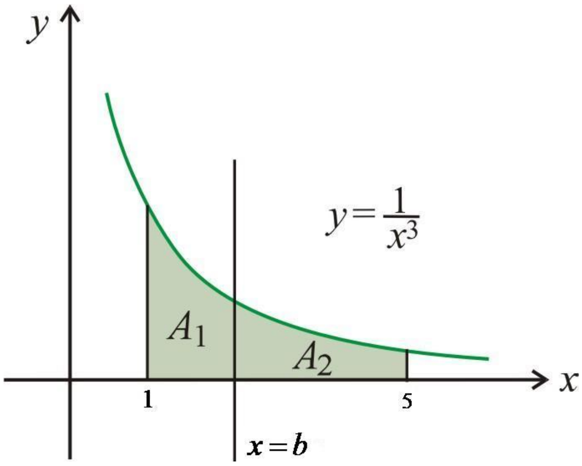

Figura 5.3