

Cálculo II – AD2 (2012/2) - Gabarito

Solução da Questão 1 a)

- a) Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2 + u^2$, com $a = \sqrt{3}$ e $u = x$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função tangente (ou cotangente), como mostra o triângulo associado da figura 1.1 a seguir

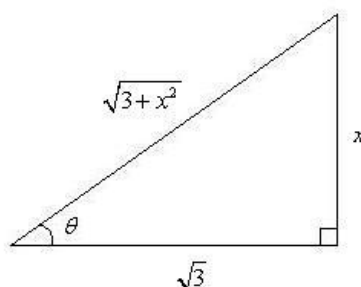


Figura 1.1

$$\text{Assim } \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \theta \\ dx = \sqrt{3} \cdot \sec^2 \theta \, d\theta \end{cases} \cdot \text{E ainda: } \begin{cases} 3 + x^2 = 3 \sec^2 \theta \\ x^3 = 3^{3/2} \cdot \operatorname{tg}^3 \theta \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Vejam os limites de integração: } \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \theta = 0 \\ x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Calculando inicialmente a integral indefinida, fica:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^3}{(3+x^2)^{5/2}} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{3^{3/2} \cdot \operatorname{tg}^3 \theta}{(3 \sec^2 \theta)^{5/2}} \cdot 3^{1/2} \cdot \sec^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\pi/6} 3^{-1/2} \frac{\operatorname{tg}^3 \theta}{\sec^3 \theta} d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen}^3 \theta \, d\theta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} \theta \cdot (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} \theta \, d\theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta + C = \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta \right]_0^{\pi/6} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\pi/6} \operatorname{sen} \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta}_{(**)} + C \end{aligned}$$

Na integral **indefinida** (**), fazendo a mudança de variável $u = \cos \theta \Rightarrow du = -\operatorname{sen} \theta \, d\theta$, logo

$$(**) = \int \operatorname{sen} \theta \cdot \cos^2 \theta \, d\theta = \int -u^2 \, du = -\frac{u^3}{3} = -\frac{\cos^3 \theta}{3} \cdot \text{Substituindo em (**), já com os limites de integração substituídos, temos que}$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(3+x^2)^{5/2}} dx = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{\sqrt{27}} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\cos^3 \frac{\pi}{6}}{\sqrt{27}} \right] - \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \cos 0 + \frac{\cos^3 0}{\sqrt{27}} \right] =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right] - \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{27}} \right] = \frac{16-9\sqrt{3}}{24\sqrt{3}}$$

Solução da Questão 1 b)

Observe que a função $f(x) = \frac{4x^2 - 7x + 10}{(x+2)(3x-2)^2}$ é uma função racional própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

O denominador possui fatores lineares repetidos, então a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{4x^2 - 7x + 10}{(x+2)(3x-2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{3x-2} + \frac{C}{(3x-2)^2} \quad (*)$$

Para determinar os valores de A , B e C multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $(x+2)(3x-2)^2$, obtendo

$$\begin{aligned} 4x^2 - 7x + 10 &= A(3x-2)^2 + B(x+2)(3x-2) + C(x+2) \\ 4x^2 - 7x + 10 &= A(9x^2 - 12x + 4) + B(3x^2 - 2x + 6x - 4) + Cx + 2C \\ 4x^2 - 7x + 10 &= 9Ax^2 - 12Ax + 4A + 3Bx^2 + 4Bx - 4B + Cx + 2C \\ 4x^2 - 7x + 10 &= (9A+3B)x^2 + (4B-12A+C)x + (4A-4B+2C) \end{aligned}$$

Isto é

$$\begin{cases} 9A + 3B = 4 \\ -12A + 4B + C = -7 \\ 4A - 4B + 2C = 10 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} 9A + 3B = 4 \\ -12A + 4B + C = -7 \\ 2A - 2B + C = 5 \end{cases} \quad (1)$$

Subtraindo as duas últimas equações de (1) temos que

$$-14A + 6B = -12 \Rightarrow -7A + 3B = -6 \quad (2)$$

De (2) e da primeira equação de (1) temos que

$$\begin{cases} 9A + 3B = 4 \\ -7A + 3B = -6 \end{cases} \quad (3)$$

Logo subtraindo as equações dadas em (3) temos que

$$16A = 10 \Rightarrow A = 5/8 \quad (4)$$

Substituindo este valor na primeira equação de (3) resulta

$$9\left(\frac{5}{8}\right) + 3B = 4 \Rightarrow 3B = 4 - \frac{45}{8} \Rightarrow B = -\frac{13}{24} \quad (5)$$

Substituindo os valores de A e B achados em (4) e (5) na última equação de (1) obtemos

$$2\left(\frac{5}{8}\right) - 2\left(\frac{13}{24}\right) + C = 5 \Rightarrow C = \frac{8}{3}. \quad (6)$$

Substituindo em (*) os valores de A , B e C achados em (4), (5) e (6) respectivamente temos

$$\frac{4x^2 - 7x + 10}{(x+2)(3x-2)^2} = \frac{5}{8(x+2)} - \frac{13}{24(3x-2)} + \frac{8}{3(3x-2)^2} \quad (7)$$

Assim

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 7x + 10}{(x+2)(3x-2)^2} dx &= \int \frac{5dx}{8(x+2)} - \int \frac{13dx}{24(3x-2)} + \int \frac{8dx}{3(3x-2)^2} \\ &= \frac{5}{8} \int \frac{dx}{(x+2)} - \frac{13}{24} \int \frac{dx}{(3x-2)} + \frac{8}{3} \int \frac{dx}{(3x-2)^2} \\ &= \frac{5}{8} \ln|x+2| - \frac{13}{(24)3} \int \frac{3dx}{(3x-2)} + \frac{8}{(3)3} \int (3x-2)^{-2} 3dx \\ &= \frac{5}{8} \ln|x+2| - \frac{13}{72} \ln|3x-2| - \frac{8}{9(3x-2)} + C \\ &= \ln\left(\frac{|x+2|^{5/8}}{|3x-2|^{13/72}}\right) - \frac{8}{9(3x-2)} + C. \end{aligned}$$

Solução da Questão 2 a)

Por definição, para um valor de $s \in \mathbb{R}$ fixado, tem-se:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_0^T e^{-st} \cos t \, dt \quad (*)$$

Pelo que foi visto no caderno didático, uma condição necessária para a convergência da integral é que a função $f(t) = e^{-st} \cos t$ satisfaça $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Se $s = 0$, então $f(t) = \cos t$ e não existe, portanto, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Se $s < 0$, então $-s > 0$. Daí $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = +\infty$ e daí também não existe $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} \cos t$.

Em particular, se $s \leq 0$, a integral é divergente.

Resta o caso $s > 0$.

Calculemos, para um valor de $T > 0$ fixado, a integral definida em (*). inicialmente, obtenhamos a primitiva

$$\int e^{-st} \cos t \, dt .$$

Usando integração por partes, façamos

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \cos t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = \sin t \end{cases}$$

Assim

$$\underbrace{\int e^{-st} \cos t \, dt}_{(I)} = \underbrace{e^{-st} \sin t + \int se^{-st} \sin t \, dt}_{(II)} = e^{-st} \sin t + s \int e^{-st} \sin t \, dt \quad (**)$$

Usando integração por partes novamente, agora em (II), façamos:

$$\begin{cases} u = e^{-st} \\ dv = \sin t \, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -se^{-st} dt \\ v = -\cos t \end{cases}$$

a integral (II) fica $\int e^{-st} \sin t \, dt = \underline{-e^{-st} \cos t} - \int se^{-st} \cos t \, dt = -e^{-st} \cos t - s \int e^{-st} \cos t \, dt .$

Substituindo em (**), fica:

$$\underbrace{\int e^{-st} \cos t \, dt}_{(I)} = e^{-st} \sin t + s \left(-e^{-st} \cos t - s \int e^{-st} \cos t \, dt \right) = e^{-st} (\sin t - s \cos t) - s^2 \underbrace{\int e^{-st} \cos t \, dt}_{(I)}$$

Isolando no lado esquerdo os termos comuns contendo a integral (I), fica:

$$(1 + s^2) \underbrace{\int e^{-st} \cos t \, dt}_{(I)} = e^{-st} (\sin t - s \cos t) \Rightarrow \int e^{-st} \cos t \, dt = \frac{e^{-st}}{1 + s^2} (\sin t - s \cos t) + C .$$

Assim, usando o TFC, a integral definida em (*) fica

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} \cos t \, dt &= \left[\frac{e^{-st}}{1 + s^2} (\sin t - s \cos t) \right]_{t=0}^{t=T} = \left[\frac{e^{-sT}}{1 + s^2} (\sin T - s \cos T) \right] - \left[\frac{e^{-s \cdot 0}}{1 + s^2} (\sin 0 - s \cos 0) \right] = \\ &= \frac{1}{1 + s^2} [e^{-sT} (\sin T - s \cos T) + s] \end{aligned}$$

Enfim, substituindo em (*), fica

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+s^2} \left[e^{-sT} (\sin T - s \cos T) + s \right] = \frac{1}{1+s^2} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[e^{-sT} (\sin T - s \cos T) \right] + \frac{s}{1+s^2}.$$

Como estamos considerando o caso $s > 0$, temos que $\lim_{T \rightarrow +\infty} (-sT) = -\infty \Rightarrow \lim_{T \rightarrow +\infty} e^{-sT} = 0$.

Como a função $y(t) = \sin t - s \cos t$ é limitada (mais precisamente $|y(t)| \leq 1 + s$, para todo $t \in \mathbb{R}$),

segue que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \left[e^{-sT} (\sin T - s \cos T) \right] = 0$ e portanto $\int_0^{+\infty} e^{-st} \cos t \, dt = \frac{s}{1+s^2}$.

Portanto, a integral é convergente se $s > 0$, e divergente se $s \leq 0$.

Solução da Questão 2 b)

$$\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} dx$$

Observe que a integral dada é imprópria do primeiro tipo, pois intervalo de integração $[0, +\infty)$ é infinito.

Note-se que o integrando $\frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8}$ pode ser escrito como

$$\frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} = \frac{8}{x^2(x+2) + 4(x+2)} = \frac{8}{(x+2)(x^2+4)}$$

e está definido no intervalo dado. Pela definição de integral imprópria, onde o limite de integração superior é infinito, temos

$$\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3 + 2x^2 + 4x + 8} dx = \int_0^{+\infty} \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} dx \quad (*)$$

Calculemos separadamente a integral indefinida $\int \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} dx$

Decompondo o integrando em frações parciais, fica:

$$\frac{8}{(x+2)(x^2+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+4}, \text{ e então}$$

$$Ax^2 + 4A + Bx^2 + 2Bx + Cx + 2C = 8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 2B+C=0 \\ 4A+2C=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=2 \end{cases}$$

Assim:

$$\int \frac{8}{(x+2)(x^2+4)} dx = \int \frac{1}{x+2} dx - \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx = \ln \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$$

Logo, substituindo em (*);

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3+2x^2+4x+8} dx &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \right]_0^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right] - \underbrace{\left[\ln \frac{|0+2|}{\sqrt{0^2+4}} + \operatorname{arctg} \frac{0}{2} \right]}_{=0} = \frac{\pi}{2}, \text{ pois} \end{aligned}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|1+\frac{2}{t}|}{\sqrt{1+\frac{4}{t^2}}} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{|t+2|}{\sqrt{t^2+4}} \right] = 0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Logo $\int_0^{+\infty} \frac{8}{x^3+2x^2+4x+8} dx = \frac{\pi}{2}$, portanto é convergente.

Solução da Questão 3 a)

A região considerada é mostrada na figura 3.1 a seguir:

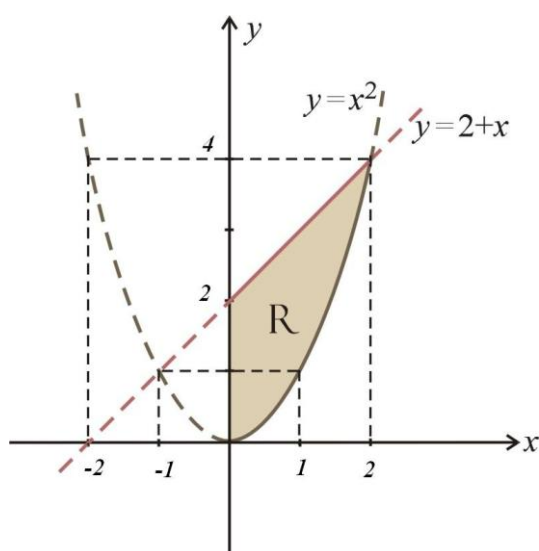


Figura 3.1

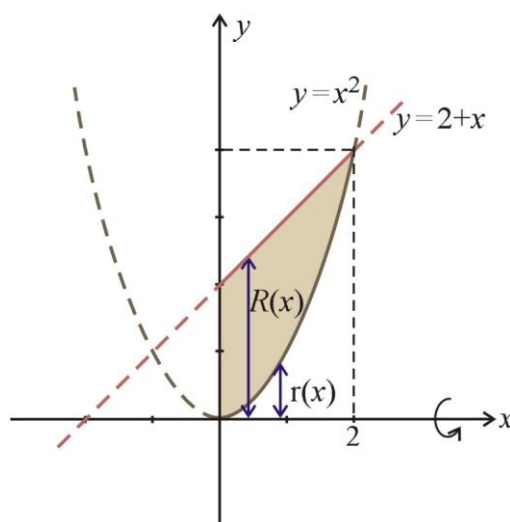


Figura 3.2

Note que o eixo de rotação é o eixo x e como a integração tem que ser feita em relação a x , o método dos discos ou arruelas é o indicado. Na figura 3.2 é mostrada a arruela típica correspondente ao problema. O sólido é mostrado na figura 3.3

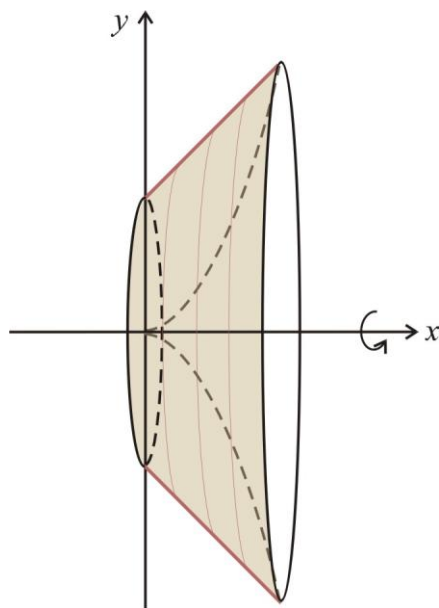


Figura 3.3

Observemos que $R(x) = 2 + x$ e $r(x) = x^2$, em que $0 \leq x \leq 2$.

Assim, denotando o volume por V , temos que:

$$V = \pi \int_0^2 [(R(x))^2 - (r(x))^2] dx = \pi \int_0^2 [(2+x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (-x^4 + x^2 + 4x + 4) dx$$

Solução da Questão 3 b)

O sólido é o mesmo exibido na figura 3.3 anterior.

Para calcular o volume deste sólido **por integração em relação a y** , observe que o método das cascas cilíndricas é o indicado.

Vamos dividir a região dada em duas regiões R_1 e R_2 , como mostra as figuras em 3.4 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo x .

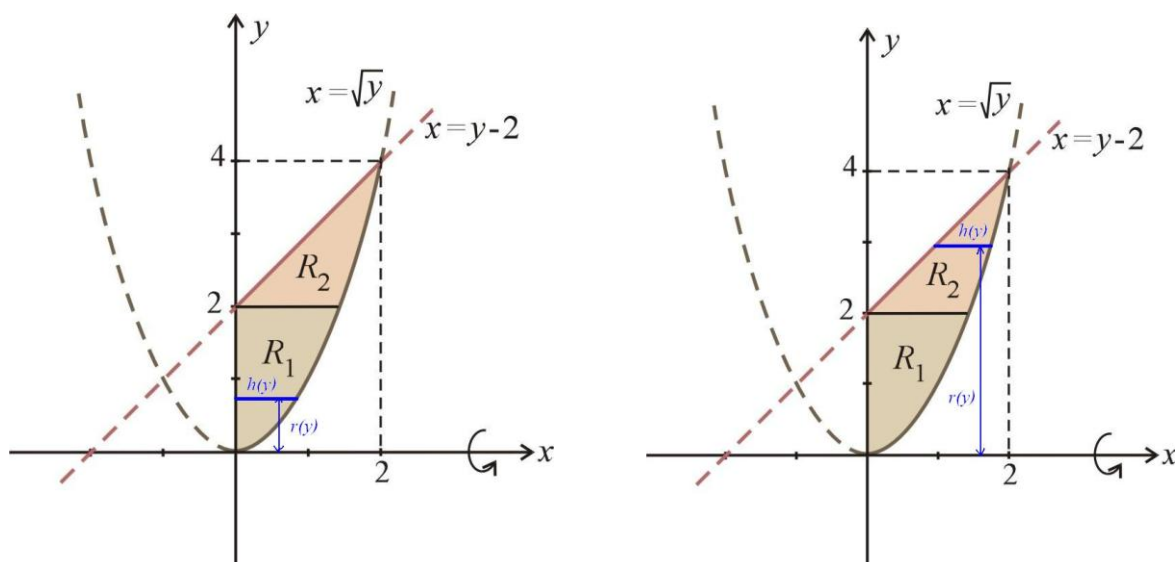


Figura 3.4

Neste caso na região R_1 para $0 \leq y \leq 2$ resulta $r(y) = y$ e $h(y) = \sqrt{y} - 0 = \sqrt{y}$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_1 = 2\pi \int_0^2 r(y) \cdot h(y) dy = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{y} dy$$

Analogamente na região R_2 para $2 \leq y \leq 4$ resulta $r(y) = y$ e

$h(y) = \sqrt{y} - (y - 2)$, $h(y) = \sqrt{y} - 0 = \sqrt{y}$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_2 = 2\pi \int_2^4 r(y) \cdot h(y) dy = 2\pi \int_2^4 y [\sqrt{y} - (y - 2)] dy$$

Assim neste caso

$$V = 2\pi \int_0^2 y \sqrt{y} dy + 2\pi \int_2^4 y [\sqrt{y} - (y - 2)] dy$$

Solução da Questão 3 c)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e como a integração tem que ser feita em relação a x , o método das cascas cilíndricas é o conveniente.

A figura 3.5 mostra a casca típica associada ao problema, em que $h(x) = (2 + x) - x^2$ e $r(x) = x$, com $0 \leq x \leq 2$.

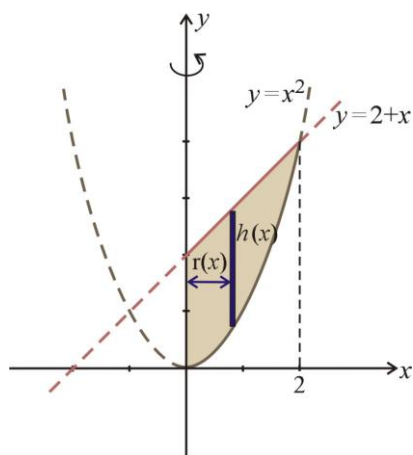


Figura 3.5

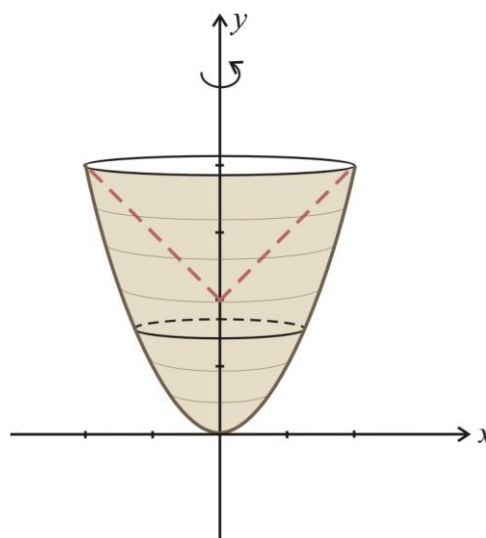


Figura 3.6

Assim, o volume V do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 r(x) \cdot h(x) dx = 2\pi \int_0^2 x(2 + x - x^2) dx = 2\pi \int_0^2 (2x + x^2 - x^3) dx.$$

O sólido é mostrado na figura 3.6 .

Solução da Questão 3 d)

Note que o eixo de rotação é o eixo y e como a integração tem que ser feita em relação a y , o método dos discos ou arruelas é o indicado.

Como no item b), vamos dividir a região dada em duas regiões R_1 e R_2 , como mostram as figuras em 3.7 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo y .

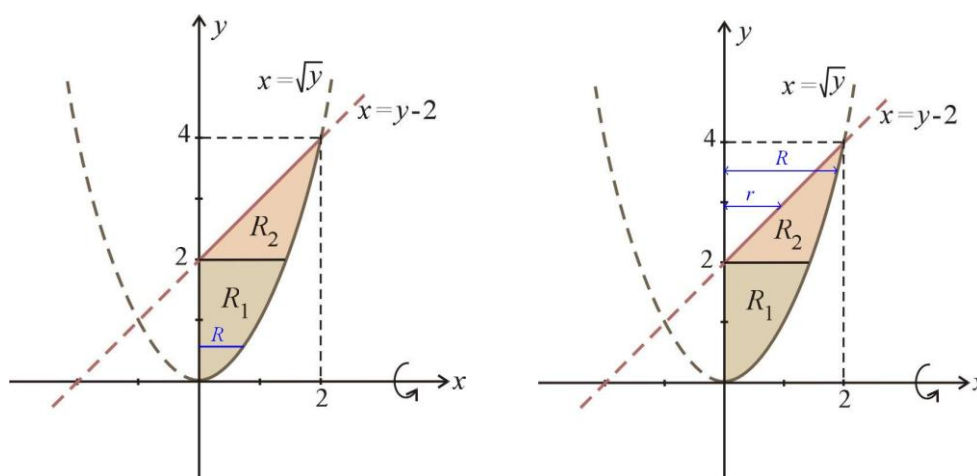


Figura 3.7

Neste caso na região R_1 para $0 \leq y \leq 2$ resulta $R(y) = \sqrt{y}$, logo denotando por V_1 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_1 = \pi \int_0^2 R(y)^2 dy = \pi \int_0^2 [\sqrt{y}]^2 dy = \pi \int_0^2 y dy$$

Analogamente na região R_2 para $2 \leq y \leq 4$ resulta $R(y) = \sqrt{y}$ e $r(y) = (y-2)$, logo denotando por V_2 o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_2 = \pi \int_2^4 [R(y)^2 - r(y)^2] dy = \pi \int_2^4 [\sqrt{y}]^2 - (y-2)^2 dy = \int_2^4 [y - (y-2)^2] dy$$

Assim neste caso

$$V = \pi \int_0^2 y dy + \pi \int_2^4 [y - (y-2)^2] dy.$$

Solução da Questão 3 e)

Note que o eixo de rotação é a reta vertical $x = 4$. Neste caso, o método das cascas cilíndricas se aplica bem. A casca típica é mostrada na figura 3.8 abaixo.

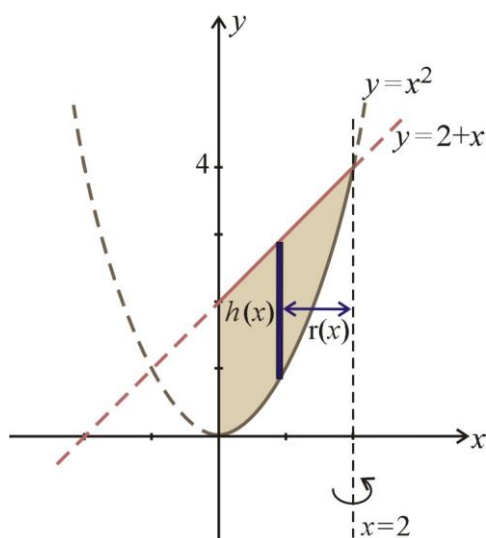


Figura 3.8

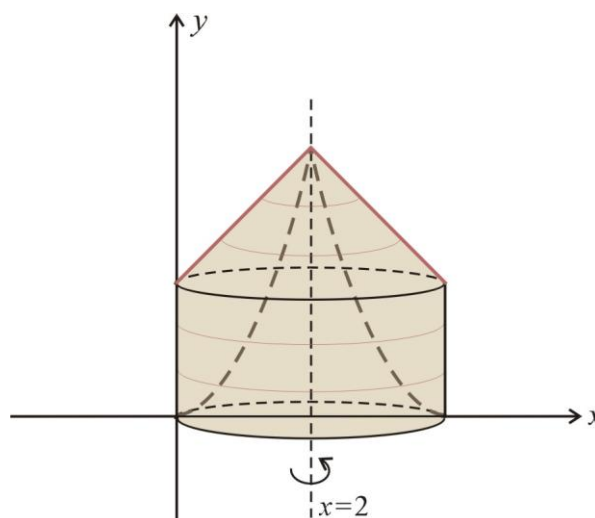


Figura 3.9

Tem-se $h(x) = (2+x) - x^2$ e $r(x) = 2 - x$, com $0 \leq x \leq 2$. O volume V do sólido é portanto dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^2 (2-x).(2+x-x^2)dx = 2\pi \int_0^2 (4-3x^2+x^3)dx.$$

O sólido é exibido na figura 3.9.

Solução da Questão 3 f)

Note que o eixo de rotação é a reta horizontal $y = 4$. Neste caso o método dos discos ou arruelas é o indicado. A arruela típica é mostrada na figura 3.10 e o sólido na figura 3.11.

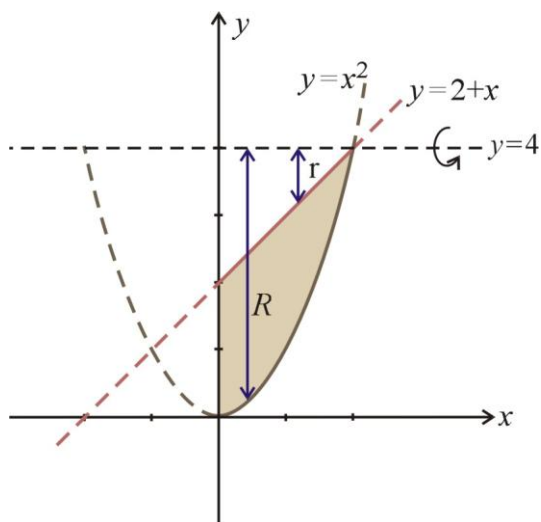


Figura 3.10

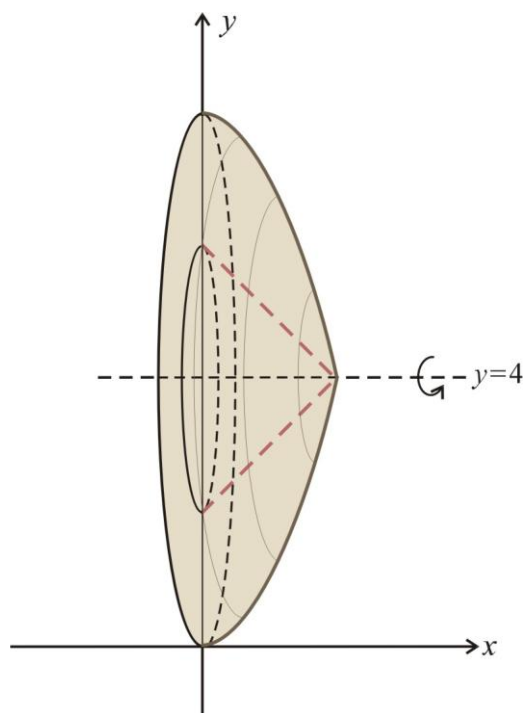


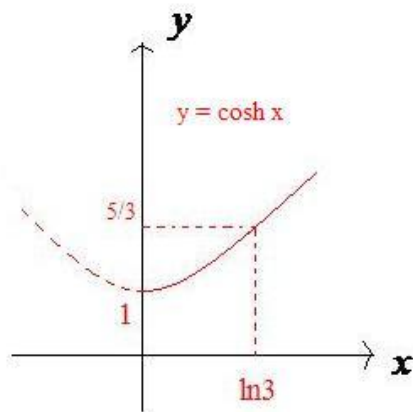
Figura 3.11

Aqui $R(x) = 4 - x^2$ e $r(x) = 4 - (2 + x) = 2 - x$, com $0 \leq x \leq 2$. Assim $(R(x))^2 = (4 - x^2)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$ e $(r(x))^2 = (2 - x)^2 = 4 - 4x + x^2$.

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_0^2 [R(x)^2 - r(x)^2] dx = \pi \int_0^2 [(4 - x^2)^2 - (4 - (2 + x))^2] dx = \pi \int_0^2 [12 + 4x - 9x^2 + x^4] dx.$$

Solução da Questão 4)



De acordo com a aula 29 do caderno didático, se uma curva é dada por $y = y(x)$, com $a \leq x \leq b$, então seu comprimento é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

$$\text{Temos } y(x) = \cosh x \Rightarrow y'(x) = \sinh x \Rightarrow \sqrt{1 + (y'(x))^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 x} = \sqrt{\cosh^2 x} = \cosh x$$

Assim

$$L = \int_0^{\ln 3} \cosh x dx = [\sinh x]_0^{\ln 3} = \sinh(\ln 3) - \sinh(0) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} - \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{3 - \frac{1}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

Logo $L = \frac{4}{3}$ unidades de comprimento.