# Cálculo II – AD2 (2013/1) - Gabarito

**Solução da Questão 1 a)**

a) Note que o denominador possui uma expressão da forma $a^2+u^2$, com $a=2$ e $u=x$, o que sugere aplicar uma mudança de variáveis via método de substituição trigonométrica usando a função tangente (ou cotangente), como mostra o triângulo associado da figura 1.1 a seguir

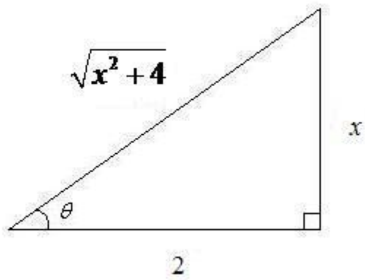



Figura 1.1

Assim $tg\,\theta=\dfrac{x}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=2tg\,\theta\\ dx=2sec^2\theta\,d\theta\end{cases}$. E ainda: $4+x^2=4sec^2\theta$ (*)

Vejamos como mudam os limites de integração: $\begin{cases}x=0\Rightarrow\theta=0\\ x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

Calculando inicialmente a integral indefinida, obtemos:

$$\int\frac{64}{(4+x^2)^{7/2}}dx=\int\frac{64}{(4sec^2\theta)^{7/2}}.2sec^2\theta\,d\theta=\int\frac{2^7\,sec^2\theta}{2^7\,sec^7\theta}d\theta=\int\sec^{-5}\theta\,d\theta=$$

$$=\int cos^5\theta\,d\theta=\int cos^4\theta.cos\theta\,d\theta=\int(1-\underbrace{\text{sen}^2\,\theta}_{u^2})^2\underbrace{cos\theta\,d\theta}_{du}=$$

$$=\int(1-u^2)^2du=\int(1-2u^2+u^4)du=u-\frac{2u^3}{3}+\frac{u^5}{5}=\text{sen}\,\theta-\frac{2\,\text{sen}^3\,\theta}{3}+\frac{\text{sen}^5\,\theta}{5}$$

Logo:

$$\int_0^{\frac{2}{\sqrt{3}}}\frac{64}{(4+x^2)^{7/2}}dx=\left[\text{sen}\,\theta-\frac{2\,\text{sen}^3\,\theta}{3}+\frac{\text{sen}^5\,\theta}{5}\right]_0^{\pi/6}=\frac{203}{480}$$

**Solução da Questão 1 b)**

Observe que a função $f(x)=\dfrac{2x^2-3}{(x+1)^2(x^2+4)}$ é uma função racional própria, isto é, o grau do numerador é menor que o grau do denominador.

**O denominador possui fatores lineares repetidos**, então a decomposição em frações parciais tem a forma

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)^2(x^2+4)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} \qquad (*)$$

Para determinar os valores de $A, B, C$ e $D$, multiplicamos ambos os lados da expressão (*) pelo produto dos denominadores $(x+1)^2(x^2+4)$, obtendo

$$2x^2-3=A(x+1)(x^2+4)+B(x^2+4)+(Cx+D)(x+1)^2$$
$$2x^2-3=A(x^3+x^2+4x+4)+B(x^2+4)+(Cx^3+2Cx^2+Cx+Dx^2+2Dx+D)$$
$$2x^2-3=(A+C)x^3+(A+B+2C+D)x^2+(4A+C+2D)x+(4A+4B+D)$$

Igualando os coeficientes dos polinômios, temos:

$$\begin{cases} A+C=0 \\ A+B+2C+D=2 \\ 4A+C+2D=0 \\ 4A+4B+D=-3 \end{cases}$$

A primeira equação nos dá $\boxed{C=-A}$. Substituindo isso na terceira, obtemos $4A-A+2D=0$, ou seja $3A+2D=0$.Usando esses dados na segunda e na quarta equações do sistema anterior, obtemos

$$\begin{cases} -5A+2B=4 \\ 5A+8B=-6 \end{cases} \qquad (1)$$

Logo somando as equações dadas em (1) temos que

$$10B=-2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B=-\frac{1}{5}}$$

Substituindo este valor na primeira equação de (1) resulta

$$-5A+2(-\frac{1}{5})=4 \quad \Rightarrow \boxed{A=-\frac{22}{25}} \Rightarrow \boxed{C=\frac{22}{25}} \text{ e } \boxed{D=\frac{33}{25}}$$

Substituindo em (*) os valores de $A$, $B$, $C$ e $D$ obtidos acima, temos

$$\frac{2x^2-3}{(x+1)^2(x^2+4)}=\frac{-22}{25(x+1)}+\frac{-1}{5(x+1)^2}+\frac{22x+33}{25(x^2+4)}$$

Assim

$$\int \frac{2x^2-3}{(x+1)^2(x^2+4)}dx = \int \frac{-22\,dx}{25(x+1)} + \int \frac{-1dx}{5(x+1)^2} + \int \frac{22x+33}{25(x^2+4)}dx$$

$$= -\frac{22}{25}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{(x+1)^2} + \frac{22}{25}\int \frac{x}{x^2+4}dx + \frac{33}{25}\int \frac{1}{x^2+4}dx$$

$$= -\frac{22}{25}\ln|x+1| + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{22}{25}\ln\sqrt{x^2+4} + \frac{33}{50}arctg(\frac{x}{2}) + C$$

**Solução da Questão 2 a)**

Analisemos a convergência da integral $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2+xe^{sx}}dx$.

Primeiramente, note que valem as seguintes estimativas:

$0 < xe^{sx} < 2 + xe^{sx}$ ( para $x > 0$ ) e que $x \geq 2 \Rightarrow 2e^{sx} \leq xe^{sx}$.

Logo: $x \geq 2 \Rightarrow 2e^{sx} \leq xe^{sx} < 2 + xe^{sx} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2+xe^{sx}} < \frac{1}{2e^{sx}} = \frac{e^{-sx}}{2}$ (*)

(**Caso 1:** $s > 0$ ) neste caso tem-se $\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} = 0$ e portanto

$$\int_2^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{2}dx = \lim_{T\to+\infty}\int_2^{T} \frac{e^{-sx}}{2}dx = \lim_{T\to+\infty}\left[\frac{-e^{-sx}}{2s}\right]_2^T = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2s}\left[e^{-2s} - e^{-sT}\right] = \frac{e^{-2s}}{2s} \qquad (**)$$

ou seja, a integral $\int_2^{+\infty} \frac{e^{-sx}}{2}dx$ é convergente e portanto, aplicando o critério de comparação em (*) segue que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2+xe^{sx}}dx$ é também convergente no caso em que $s > 0$ .

(**Caso 2:** $s \leq 0$ ) Note que, no caso $s < 0$, tem-se $\lim_{T\to+\infty} e^{-sT} = +\infty$ e **não se pode**, portanto, tirar conclusões sobre a convergência da integral, como no caso anterior, baseando-se em (*) e (**).

Entretanto, lembrando que estamos interessados no intervalo de integração de $x \geq 2$ , temos que

$$\underset{\substack{x>0\\ s\leq 0}}{e^{sx} \leq} e^0 = 1 \Rightarrow xe^{sx} \leq x \Rightarrow 2 + xe^{sx} \leq 2 + x \underset{x\geq 2}{\leq} x + x = 2x$$ ou seja , $2 + xe^{sx} \leq 2x \Rightarrow \frac{1}{2x} \leq \frac{1}{2+xe^{sx}}$

Segue portanto do critério de comparação que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2+xe^{sx}}dx$ é divergente neste caso, uma vez que $\int_2^{+\infty} \frac{1}{2x}dx$ é divergente.

Portanto, a integral é convergente caso $s>0$ e divergente, caso $s\leq 0$.

**Solução da Questão 2 b)**

Analisemos a convergência da integral $\int_1^{+\infty} \left|\frac{47sen^3 x}{109x^2+38\pi e^{x^2}}\right|dx$.

De acordo com o exemplo 27.6 do caderno didático, se esta última convergir, então a integral dada neste item também será convergente.

Note que o denominador é sempre positivo.
Primeiramente, segue de $|sen x|\leq 1$ que

$$\frac{47|sen^3 x|}{109x^2+38\pi e^{x^2}} \leq \frac{47}{109x^2+38\pi e^{x^2}} \qquad (1)$$

Em segundo lugar:

$$109x^2+38\pi e^{x^2} \geq 38\pi e^{x^2} \Rightarrow \frac{1}{109x^2+38\pi e^{x^2}} \leq \frac{1}{38\pi e^{x^2}} \qquad (2)$$

Agora, para $x\geq 1$ vale que

$$x^2 \geq x \Rightarrow e^{x^2} \geq e^x \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} \leq \frac{1}{e^x} \qquad (3)$$

Segue de (1), (2) e (3) que

$$\frac{47|sen^3 x|}{109x^2+38\pi e^{x^2}} \leq \frac{47}{38\pi e^x} = \frac{47e^{-x}}{38\pi} = \frac{47}{38\pi}e^{-x}, \text{ para todo } x\geq 1. \qquad (4)$$

É fácil ver que a integral $\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ é convergente, pois

$$\int_1^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{T\to\infty}\int_1^{T} e^{-x}dx = \lim_{T\to\infty}[-e^{-x}]_1^T = \lim_{T\to\infty}[e^{-1}-e^{-T}] = e^{-1}$$

Segue então de (4), usando o critério de comparação, que a integral $\int_1^{+\infty} \left|\frac{47sen^3 x}{109x^2+38\pi e^{x^2}}\right|dx$ é convergente e consequentemente $\int_1^{+\infty} \frac{47sen^3 x}{109x^2+38\pi e^{x^2}}dx$ também é convergente.

**Solução da Questão 3 a)**

A região considerada é mostrada na figura 3.1 a seguir:

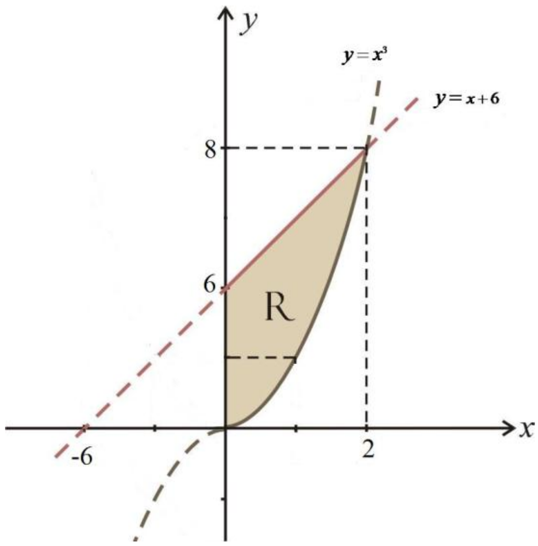



Figura 3.1

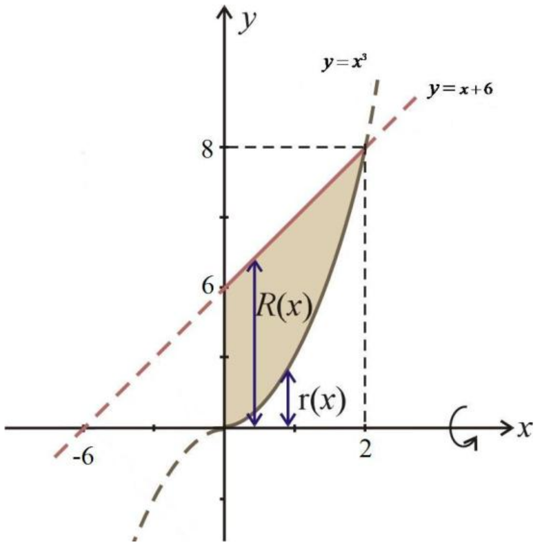



Figura 3.2

**Note que o eixo de rotação é o eixo $x$ e como a integração tem que ser feita em relação a $x$ ,** o método dos discos ou arruelas é o indicado. Na figura 3.2 é mostrada a arruela típica correspondente ao problema. O sólido é mostrado na figura 3.3

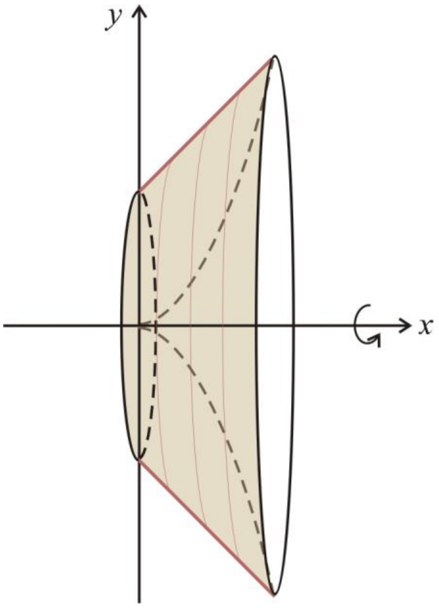



Figura 3.3

Observemos que $R(x)=x+6$ e $r(x)=x^3$ , em que $0\le x\le 2$ .

Assim, denotando o volume por $V$ , temos que:

$$V=\pi\int_0^2\left[(R(x))^2-(r(x))^2\right]dx=\pi\int_0^2\left[(x+6)^2-(x^3)^2\right]dx=\pi\int_0^2(-x^6+x^2+12x+36)dx$$

**Solução da Questão 3 b)**

O sólido é o mesmo exibido na figura 3.3 anterior.

Para calcular o volume deste sólido **por integração em relação a $y$,** observe que o método das cascas cilíndricas é o indicado.
Vamos dividir a região dada em duas regiões $R_1$ e $R_2$, como mostra as figuras em 3.4 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo $x$.

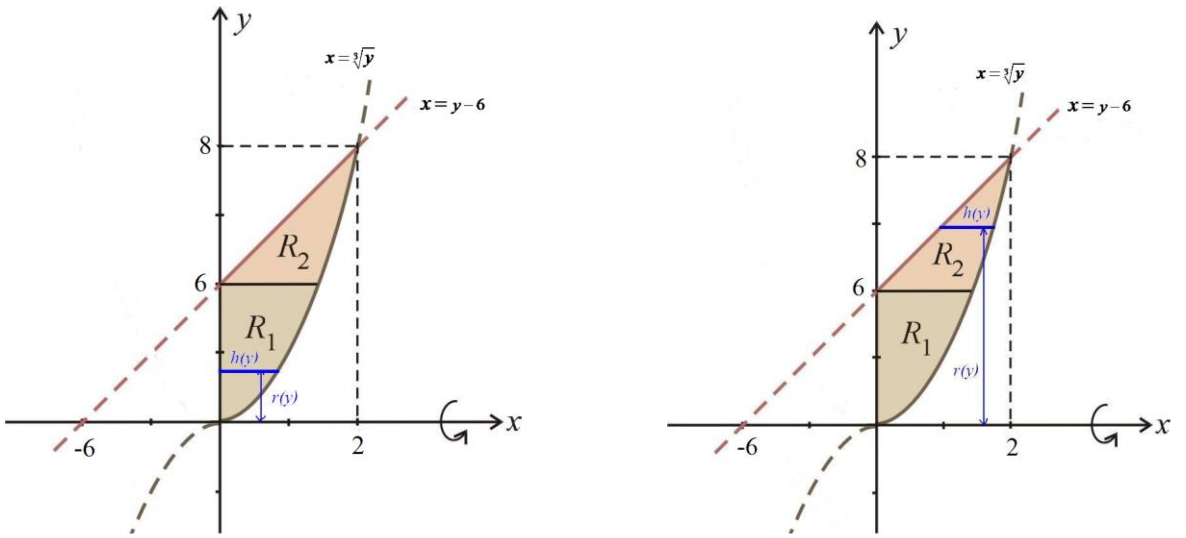



Figura 3.4

Neste caso na região $R_1$ para $0\le y\le 6$ resulta $r(y)=y$ e $h(y)=\sqrt[3]{y}-0=\sqrt[3]{y}$, logo denotando por $V_1$ o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_1=2\pi\int_0^6 r(y).h(y)dy=2\pi\int_0^6 y\sqrt[3]{y}\,dy=2\pi\int_0^6 y^{\frac{4}{3}}\,dy$$

Analogamente na região $R_2$ para $6\le y\le 8$ resulta $r(y)=y$ e $h(y)=\sqrt[3]{y}-(y-6)$,logo denotando por $V_2$ o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo x , temos que

$$V_2=2\pi\int_6^8 r(y).h(y)dy=2\pi\int_6^8 y[\sqrt[3]{y}-(y-6)]dy$$

Assim neste caso

$$V=2\pi\int_0^6 y^{\frac{4}{3}}\,dy+2\pi\int_6^8 y[\sqrt[3]{y}-(y-6)]dy$$

**Solução da Questão 3 c)**

**Note que o eixo de rotação é o eixo $y$ e como a integração tem que ser feita em relação a $x$**, o método das cascas cilíndricas é o conveniente.

A figura 3.5 mostra a casca típica associada ao problema, em que $h(x) = (x+6) - x^3$ e $r(x) = x$, com $0 \le x \le 2$.

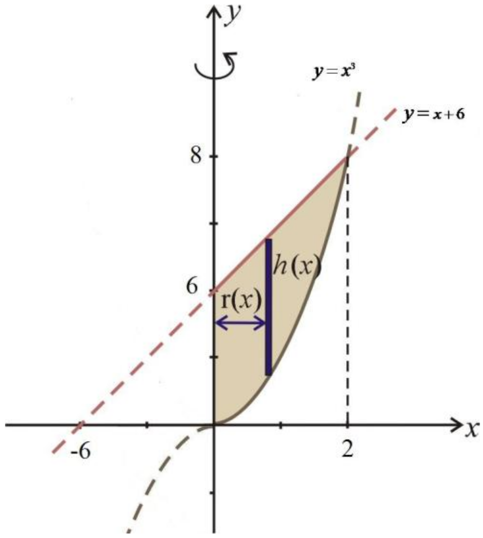



Figura 3.5

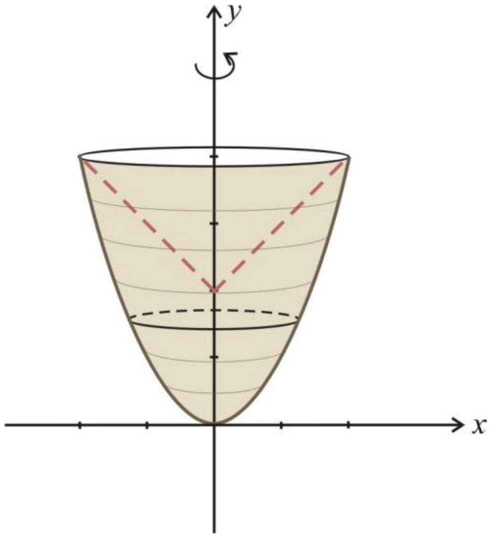



Figura 3.6

Assim, o volume $V$ do sólido é dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 r(x).h(x)dx = 2\pi \int_0^2 x(x+6-x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (x^2+6x-x^4)dx\ .$$

O sólido é mostrado na figura 3.6 .

**Solução da Questão 3 d)**

**Note que o eixo de rotação é o eixo $y$ e como a integração tem que ser feita em relação a $y$**, o método dos discos ou arruelas é o indicado.

Como no item b), vamos dividir a região dada em duas regiões $R_1$ e $R_2$, como mostram as figuras em 3.7 a seguir, e então somar os volumes dos sólidos obtidos girando cada uma delas em torno do eixo $y$ .

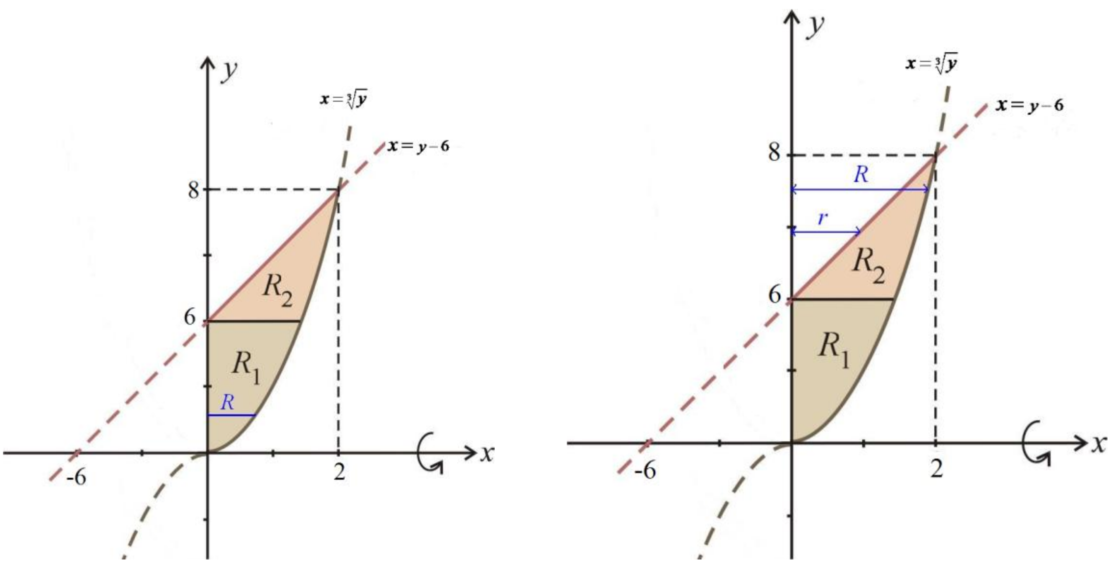



Figura 3.7

Neste caso na região $R_1$ para $0 \le y \le 6$ resulta $R(y) = \sqrt[3]{y}$ , logo denotando por $V_1$ o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_1 = \pi \int_0^6 \left[ R(y) \right]^2 dy = \pi \int_0^6 \left[ \sqrt[3]{y} \right]^2 dy = \pi \int_0^6 y^{\frac{2}{3}}\, dy$$

Analogamente na região $R_2$ para $6 \le y \le 8$ resulta $R(y) = \sqrt[3]{y}$ e $r(y) = (y-6)$ , ,logo denotando por $V_2$ o volume obtido ao girar esta região em torno do eixo y , temos que

$$V_2 = \pi \int_6^8 \left[ \left[R(y)\right]^2 - \left[r(y)\right]^2 \right] dy = \pi \int_6^8 [\left[ \sqrt[3]{y} \right]^2 - (y-6)^2] dy = \pi \int_6^8 [y^{\frac{2}{3}} - (y-6)^2] dy$$

Assim neste caso

$$V = \pi \int_0^6 y^{\frac{2}{3}}\, dy + \pi \int_6^8 [y^{\frac{2}{3}} - (y-6)^2] dy .$$

**Solução da Questão 3 e)**

**Note que o eixo de rotação é a reta vertical $x = 2$ .** Neste caso, o método das cascas cilíndricas se aplica bem. A casca típica é mostrada na figura 3.8 abaixo.

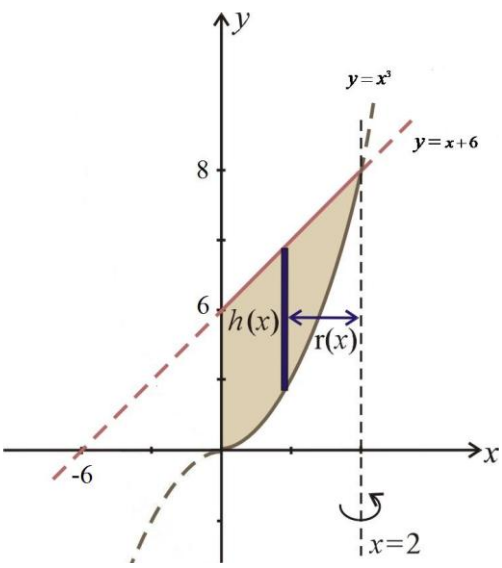



Figura 3.8

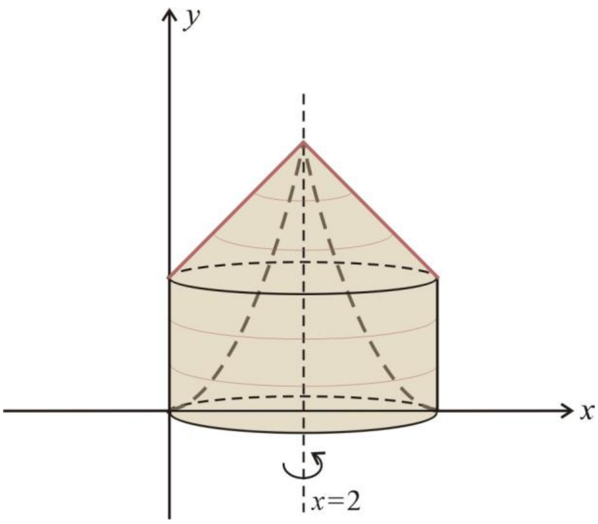



Figura 3.9

Tem-se $h(x) = (x+6) - x^3$ e $r(x) = 2 - x$, com $0 \le x \le 2$. O volume $V$ do sólido é portanto dado por

$$V = 2\pi \int_0^2 r(x)h(x)dx = 2\pi \int_0^2 (2-x).(x+6-x^3)dx = 2\pi \int_0^2 (12 - 4x - x^2 - 2x^3 + x^4)dx .$$

O sólido é exibido na figura 3.9.

**Solução da Questão 3 f)**

**Note que o eixo de rotação é a reta horizontal** $y = 8$**.** Neste caso o método dos discos ou arruelas é o indicado. A arruela típica é mostrada na figura 3.10 e o sólido na figura 3.11.

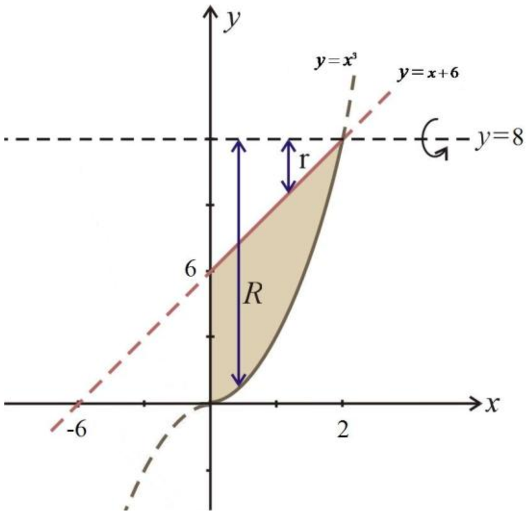



Figura 3.10

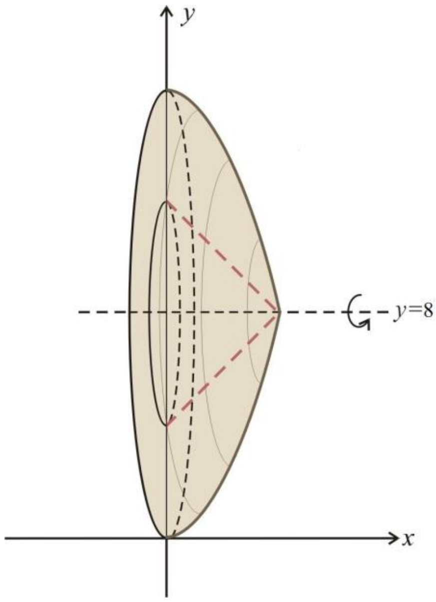


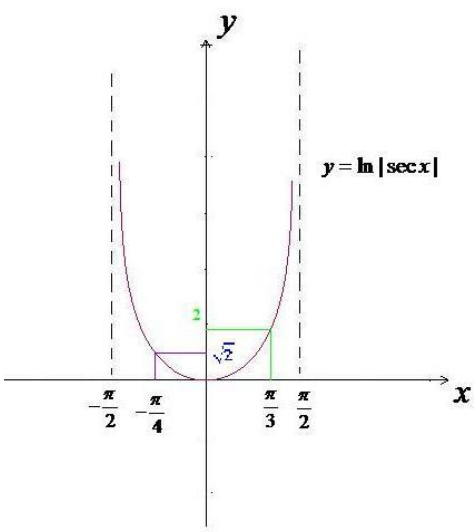

Figura 3.11

Aqui $R(x) = 8 - x^3$ e $r(x) = 8-(x+6) = 2-x$, com $0 \le x \le 2$. Assim
$(R(x))^2 = (8-x^3)^2 = 64 - 16x^3 + x^6$ e $(r(x))^2 = (2-x)^2 = 4-4x+x^2$ .

Portanto, o volume do sólido é dado por

$$V = \pi \int_0^2 \left[ R(x)^2 - r(x)^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[ (8-x^3)^2 - (8-(x+6))^2 \right] dx = \pi \int_0^2 \left[ 60 + 4x - x^2 - 16x^3 + x^6 \right] dx .$$

**Solução da Questão 4)**



De acordo com a aula 29 do caderno didático, se uma curva é dada por $y = y(x)$ , com $a \le x \le b$ , então seu comprimento é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(y'(x))^2}\, dx .$$

Temos $y(x) = \ln|\sec x| \Rightarrow y'(x) = tg\, x \Rightarrow \sqrt{1+(y'(x))^2} = \sqrt{1+tg^2 x} = \sqrt{\sec^2 x} = |\sec x| = \sec x$ pois $-\dfrac{\pi}{4} \le x \le \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \sec x > 0$ .

Assim

$$L = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sec x\, dx = \ln|\sec x + tg\, x|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln|2+\sqrt{3}| - \ln|\sqrt{2}-1| = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

Logo $L = \ln\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-1}\right)$ unidades de comprimento.