

AP1- CÁLCULO II-2009/2 Gabarito

1ª Questão (2 pontos) Seja R a região limitada pelas curvas dadas

$$y = \sqrt{x}, \quad y = e^x, \quad x = 0, \quad x = 1.$$

- a) Esboce a região R .
- b) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável x .
- c) Represente a área de R por uma ou mais integrais em relação à variável y .
- d) Calcule a área da região R (Use a representação mais conveniente).

Solução

(a) A Região R é mostrada na Figura 1

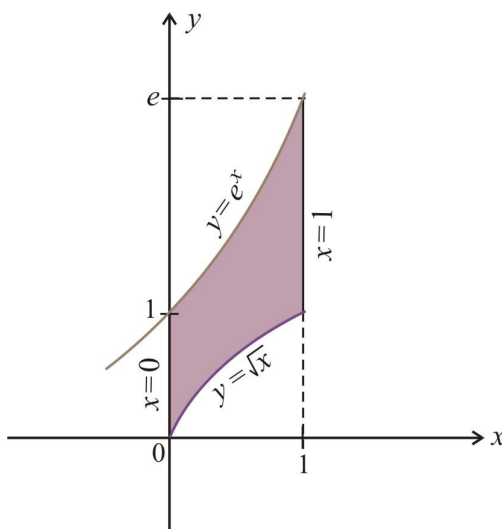


Figura 1

(b) Na Figura 2 mostramos também um retângulo típico (ou representativo) vertical na região.

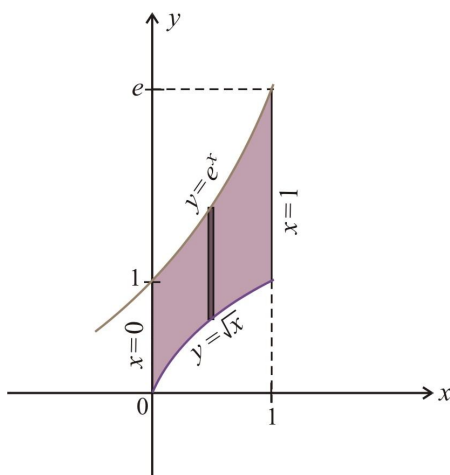


Figura 2

Neste caso a representação da área é feita por uma integral em relação à variável x :

$$A(R) = \int_0^1 (e^x - \sqrt{x}) dx$$

- (c) Dessa forma a região R precisa ser dividida em duas regiões, na Figura 3 mostramos um retângulo representativo horizontal em cada região.

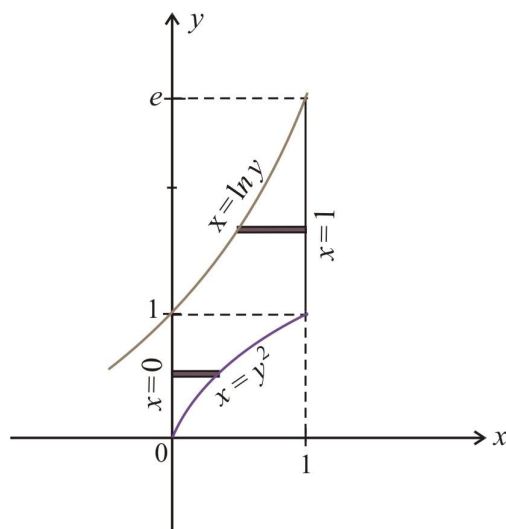


Figura 3

Neste caso a representação da área é feita por duas integrais em relação à variável y :

$$A(R) = \int_0^1 (y^2 - 0) dy + \int_1^e (1 - \ln y) dy$$

- (d) Observe-se que a representação mais conveniente é neste caso a representação em relação à variável x

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_0^1 (e^x - \sqrt{x}) dx = \int_0^1 (e^x - x^{\frac{1}{2}}) dx = e^x - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\ &= e^1 - \frac{2}{3} - e^0 = e - \frac{2}{3} - 1 = e - \frac{5}{3} \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

2ª Questão (3,0 pontos) –

(a) Derive as seguintes funções:

i) $f(x) = 2^{\cos(x^2)} (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}}$

ii) $g(x) = x^{(\ln 2)/(1 + \ln x)}$

(b) Calcule o limite seguinte: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x$.

Solução

(a) i)

$$f(x) = 2^{\cos(x^2)} (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = 2^{\cos(x^2)} \left((1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}} \right)' + \left(2^{\cos(x^2)} \right)' (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}}$$

$$f'(x) = 2^{\cos(x^2)} \left(\sqrt{2} (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}-1} (-2 \cos x \sin x) \right) + \left(2^{\cos(x^2)} (-\sin(x^2)) 2x \ln 2 \right) (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}}$$

Ou também

$$f'(x) = 2^{\cos(x^2)+1} (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}-1} \left(-\sqrt{2} \cos x \sin x - x \ln 2 \sin(x^2) (1 + \cos^2 x) \right).$$

Ou ainda

$$f'(x) = -2^{\cos(x^2)+1} (1 + \cos^2 x)^{\sqrt{2}-1} \left(\sqrt{2} \cos x \sin x + x \ln 2 \sin(x^2) (1 + \cos^2 x) \right).$$

ii) Observe que $g(x) = x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} = e^{\ln x^{(\ln 2)/(1+\ln x)}} = e^{\frac{(\ln 2) \ln x}{(1+\ln x)}}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{\frac{(\ln 2) \ln x}{(1+\ln x)}} \left(\frac{(\ln 2) \ln x}{(1+\ln x)} \right)' = x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} \left(\frac{(1+\ln x) \frac{(\ln 2)}{x} - \frac{(\ln 2)}{x} \ln x}{(1+\ln x)^2} \right) \\ &= x^{(\ln 2)/(1+\ln x)} \frac{(\ln 2)}{x(1+\ln x)^2} \end{aligned}$$

(b)Observe que o limite dado é uma forma indeterminada do tipo $(1)^\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)} \quad (*)$$

Observe que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right) \rightarrow +\infty \cdot 0$ e que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} \right)}{\frac{1}{x}} \rightarrow \frac{0}{0}$.

Podemos aplicar L'Hôpital ao último limite logo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}} &\stackrel{\substack{\text{L'H} \\ \text{H}}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)' / \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(-\frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right) / \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2) \left(-\frac{3}{x^2} - \frac{10}{x^3}\right) / \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{10}{x}\right) / \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 3 \quad (**)
\end{aligned}$$

Substituindo (**) em (*) temos que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}\right)^x = e^3$

3ª Questão (2,0 pontos) - Calcule:

a) $\int x \operatorname{arctg}(x^2) dx$

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2) dx = \int \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_u \underbrace{xdx}_{dv}$$

$$\text{Sejam } \begin{cases} u = \operatorname{arctg} x^2 \\ dv = x dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2x}{1+(x^2)^2} dx = \frac{2x}{1+x^4} dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

Então usando integração por partes, temos

$$\int \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_u \underbrace{xdx}_{dv} = \underbrace{\operatorname{arctg}(x^2)}_u \underbrace{\frac{x^2}{2}}_v - \int \underbrace{\left(\frac{x^2}{2}\right)}_v \underbrace{\frac{2x dx}{1+x^4}}_{du} = \left(\frac{x^2}{2}\right) \operatorname{arctg}(x^2) - \int \frac{x^3 dx}{1+x^4}$$

$$\int x \operatorname{arctg}(x^2) dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{4} \int \frac{4x^3}{1+x^4} dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg}(x^2) - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$$

b) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot^3(x) \operatorname{cosec}^2 x dx$

Fazendo a substituição

$$u = \cotg(t) \Rightarrow du = -\operatorname{cosec}^2(t) dt$$

Fazendo a mudança dos limites de integração

$$\text{se } t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1 \quad \text{se } t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow u = \cotg\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{Obtemos } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cotg^3(x) \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\int_1^0 u^3 du = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Solução

4ª Questão (3,0 pontos) – Dada a função $f(x) = e^{-x^2/2}$, determine:

- (0,2 pontos) o domínio de f ;
- (0,5 pontos) as assíntotas horizontais e verticais (se existirem) para o gráfico de f ;
- (0,5 pontos) os intervalos em que f é crescente e os intervalos em que f é decrescente;
- (0,3 pontos) os pontos de máximos e/ou mínimos relativos e absolutos de f (se existirem);
- (0,5 pontos) os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para baixo e os intervalos em que o gráfico de f é côncavo para cima;
- (0,3 pontos) os pontos de inflexão (se existirem);
- (0,5 pontos) um esboço do gráfico de f ;
- (0,2 pontos) a imagem de f .

Solução

a) (0,2 pontos). $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$

b) (0,5 pontos)

Note que f é uma função continua definida em todo $\mathbb{R}$ logo não existem assíntotas verticais.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2/2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2/2}} = 0, \text{ logo } y = 0 \text{ é a única}$$

assíntota horizontal.

c) (0,5 pontos) $f'(x) = e^{-x^2/2}(-x)$.

Como $e^{-x^2/2}$ é sempre maior que zero, temos que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Portanto $x = 0$ é um número crítico.

Se $x < 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, logo de aqui deduzimos que f é crescente em $(-\infty, 0)$.

Se $x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, logo deduzimos que f é decrescente no intervalo $(0, +\infty)$.

d) (0,3 pontos) Do item (c) e o teste da derivada 1ª podemos afirmar que em $x = 0$, existe um máximo relativo e $f(0) = \frac{1}{e^0} = 1$. Assim $(0,1)$ é um ponto de máximo relativo. Como $x = 0$ é o único ponto crítico no intervalo $(-\infty, +\infty)$, podemos dizer também que existe um máximo absoluto nesse ponto.

e) (0,5 pontos)

$$f''(x) = e^{-x^2/2}(-x)' + (e^{-x^2/2})'(-x) = -e^{-x^2/2} + e^{-x^2/2}(-x)(-x)$$

Logo

$$f''(x) = -e^{-x^2/2} + x^2 e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)e^{-x^2/2} = (x-1)(x+1)e^{-x^2/2}$$

$$\text{Assim, } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

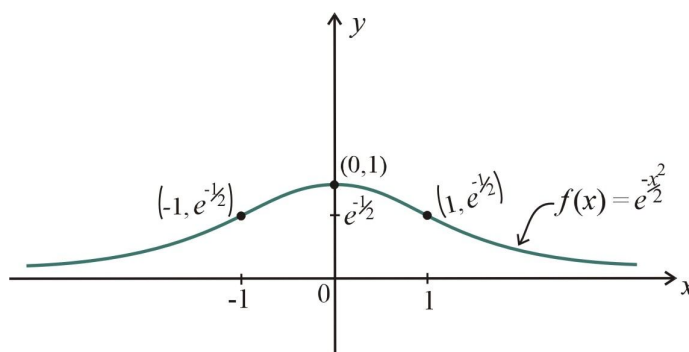
Intervalos:	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Sinal de $e^{-x^2/2}$	+	+	+
Sinal de $(x-1)$	-	-	+
Sinal de $(x+1)$	-	+	+
Sinal de f''	+	-	+
Gráfico de f	∪	∩	∪

Portanto, o gráfico de f é côncavo para baixo no intervalo $(-1, 1)$ e o gráfico de f é côncavo para cima no intervalo $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

f) (0,3 pontos) Existe mudança de concavidade nos pontos $(-1, f(-1))$ e $(1, f(1))$ observe que

$$f(1) = e^{-\frac{1}{2}} = f(-1), \text{ e existe reta tangente nesses pontos já que } f'(1) \text{ e } f'(-1) \text{ existe.}$$

Então $(1, e^{-\frac{1}{2}})$ e $(-1, e^{-\frac{1}{2}})$ são pontos de inflexão.

g) (0,5 pontos) Esboço do gráfico de f .h) (0,2 pontos) Do gráfico de f observamos que $\text{Im}(f) = (0, 1]$.