Equações Diferenciais - Exercícios Suplementares para a AP2

Mensagem do Coordenador:

Caros alunos(as),

O objetivo desta lista é apresentar alguns exercícios para ajudá-los na prepararação para a 2^a A.P. de Equações Diferenciais [a].

Bons estudos e boa avaliação!

Um abraço
Pedro Nobrega

[a] A verificação dos cálculos, apontando eventuais enganos/omissões fica por conta de vocês. É uma boa forma de trabalho colaborativo

---

1. Sabendo que $y_1(x)$ é uma solução da equação diferencial dada, *use o método de redução de ordem* para calcular uma segunda solução, $y_2(x)$, linearmente independente de $y_1(x)$ [1].

   (a) $y'' + 2y' + y = 0; \quad y_1(x) = x\,e^{-x}$
   (b) $y'' + 9y = 0; \quad y_1(x) = sen\,3x$
   (c) $9y''-12y'+4y = 0; \quad y_1(x) = e^{2x/3}$
   (d) $x^2\,y''-7xy'+16y = 0; \; y_1(x) = x^4$
   (e) $x^2\,y''+2xy'-6y = 0; \quad y_1(x) = x^2$
   (f) $4x^2\,y''+y = 0; \quad y_1(x) = x^{1/2} ln\,x.$

2. *Use o método da variação de parâmetros*, para calcular a solução geral ou resolver o PVI:

   (a) $y'' + y = sen\,x;$
   (b) $y'' + y = cos^2\,x;$
   (c) $y'' + 3y' + 2y = e^x;$
   (d) $2\,y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x};$
   (e) $4\,y'' - y = xe^{x/2}$, $y(0) = 1, y'(0) = 0;$
   (f) $2\,y'' + y' - y = x + 1$, $y(0) = 1, y'(0) = 0.$

3. Calcule a solução geral ou resolva o PVI:

   (a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$,

   (b) $\overrightarrow{Y}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \overrightarrow{Y},$

   (c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (-5/2)x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = (3/4)x - 2y \end{cases}$,

   (d) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ (-5/2) & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X},$

[1] Conside o intervalo $(0, +\infty)$ nos itens (d), (e) e (f).

(e) $\begin{cases} \overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}, \\ \overrightarrow{X}(0) = (3,5) \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$,

(g) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$,

(h) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 6y \end{cases}$
$x(0) = -1,\; y(0) = 6,$

(i) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{X},$

(j) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}.$

Soluções:

1. Em todos os itens, usaremos a fórmula $y_2(x) = y_1(x) \displaystyle\int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx$, tendo o cuidado de verificar previamente se a equação está na forma normal.

   (a) $y'' + 2y' + y = 0; \quad y_1(x) = x\,e^{-x}$

   A equação está normalizada.

   Temos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)\,dx}}{y_1^2(x)}\,dx \\ &= xe^{-x} \int \frac{e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}}\,dx \\ &= xe^{-s} \int x^{-2}\,dx = \frac{xe^{-x}.x^{-1}}{-1} \\ &= -e^{-x}. \end{aligned}$$

   (b) $y'' + 9y = 0; \qquad y_1(x) = sen\,3x$

   A equação está normalizada.

   Temos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= sen(3x) \int \frac{e^{0.x}}{sen^2(3x)}\,dx \\ &= sen(3x) \int \frac{1}{sen^2(3x)}\,dx = sen(3x) \int cossec^2(3x)\,dx \\ &= \frac{sen(3x)}{3}.(-cotg(3x)) \\ &= -\frac{1}{3} sec(3x). \end{aligned}$$

(c) $9y'' - 12y' + 4y = 0; \quad y_1(x) = e^{2x/3}$

Normalizando a equação: $y'' - (12/9)y' + (4/9)y = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= e^{2x/3}\int \frac{e^{(12/9)x}}{e^{4x/3}}\,dx \\
&= e^{2x/3}\int \frac{e^{(12/9)x}}{e^{4x/3}}\,dx \\
&= e^{2x/3}\left(\int e^{[(12/9)x-(4/3)x]}\,dx\right) \\
&= e^{2x/3}\int e^{0.x}\,dx \\
&= xe^{2x/3}.
\end{aligned}$$

(d) $x^2\,y'' - 7xy' + 16y = 0;\ y_1(x) = x^4$

Normalizando a equação: $y'' - \dfrac{7x}{x^2}y' + \dfrac{16}{x^2}y = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^4\int \frac{e^{\int 7/x\,dx}}{x^8}\,dx \\
&= x^4\int \frac{e^{7ln(x)}x^8}{}dx \\
&= x^4\int \frac{x^7}{x^8}\,dx \\
&= x^4\int \frac{1}{x}\,dx \\
&= x^4\,ln(|x|).
\end{aligned}$$

(e) $x^2\,y'' + 2xy' - 6y = 0; \quad y_1(x) = x^2$

Normalizando a equação: $y'' + \dfrac{2x}{x^2}y' - \dfrac{6}{x^2}y = 0$.

Temos:

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= x^2\int \frac{e^{-\int 1/x\,dx}}{x^8}\,dx \\
&= x^2\int \frac{e^{[ln(x^{-1})]}}{x^4}\,dx \\
&= x^2\int x^{-5}\,dx \\
&= x^2\,\frac{x^{-4}}{-4} \\
&= -\frac{1}{4}x^{-2}.
\end{aligned}$$

(f) $4x^2\,y'' + y = 0; \quad y_1(x) = x^{1/2} ln\, x.$

Normalizando a equação: $y'' + \dfrac{1}{4x^2} y = 0.$

Temos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{1/2}\,ln(x) \int \frac{e^{-\int 0\,dx}}{x\,ln^2(x)}\,dx \\ &= x^{1/2}\,ln(x) \int \frac{ln^{-2}x}{x}\,dx \\ &= x^{1/2}\,ln(x).ln^{-1}(x) \\ &= x^{1/2}. \end{aligned}$$

2. *Use o método da variação de parâmetros*, para calcular a solução geral ou resolver o PVI:

(a) $y'' + y = sen\, x;$

A equação está normalizada.

A equação característica associada é, $m^2 + 1 = 0$, cujas raízes são $m_1 = i, m_2 = -i$.

Daí a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{cos(x)}_{y_1} + c_2 \underbrace{sen(x)}_{y_2}$$

Temos que o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é

$$W = det \begin{pmatrix} cos(x) & sen(x) \\ -sen(x) & cos(x) \end{pmatrix} = cos^2(x) + sen^2 x = 1.$$

Pelo método de variação dos parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1 + c_2(x)\,y_2;$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\,dx \qquad \text{e} \qquad c_2(x) = \int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\,dx;$$

onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada.*

Assim,

$$c_1(x) = -\int \frac{sen(x).sen(x)}{1}\,dx \quad \text{e} \quad c_2(x) = \int \frac{cos(x).sen(x)}{1}\,dx.$$

Portanto

$$c_1(x) = -\int sen^2(x)\,dx = -\int \left(\frac{1 - cos(2x)}{2}\right)\,dx = \frac{sen(2x)}{4} - \frac{x}{2}.$$

e

$$c_2(x) = \frac{sen^2(x)}{2}.$$

Consequentemente

$$y_p(x) = \left(\frac{sen(2x)}{4} - \frac{x}{2}\right).y_1(x) + \left(\frac{sen^2(x)}{c}\right).y_2(x)$$

e uma solução geral de $y'' + y = sen\, x$ é

$$y(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + \left(\frac{sen(2x)}{4} - \frac{x}{2}\right) cos(x) + \left(\frac{sen^2(x)}{c}\right) sen(x).$$

(b) $y'' + y = cos^2\, x$;

A equação característica associada é a mesma do item precedente, e a solução geral da equação homogênea associada é $y_h(x) = c_1 \underbrace{cos(x)}_{y_1} + c_2 \underbrace{sen(x)}_{y_2}$, e $W = 1$.

Pelo método de variação dos parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2;$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\, dx \qquad \text{e} \qquad c_2(x) = \int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\, dx;$$

onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada*.

Neste item,

$$c_1(x) = -\int \frac{cos^2(x).sen(x)}{1}\, dx \quad \text{e} \quad c_2(x) = \int \frac{cos^2(x).cos(x)}{1}\, dx.$$

Portanto

$$c_1(x) = \frac{cos^3(x)}{3}$$

e

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \frac{1}{3}\int cos^3(x)\, dx \\ &= \frac{cos^2(x)sen(x)}{9} + \frac{2}{9}\int cos(x)\, dx \\ &= \frac{cos^2(x)sen(x)}{9} + \frac{2}{9}sen(x). \end{aligned}$$

Consequentemente

$$y_p(x) = \left(\frac{cos^3(x)}{3}\right).y_1(x) + \left(\frac{cos^2(x)sen(x)}{9} + \frac{2}{9}sen(x)\right).y_2(x)$$

e uma solução geral de $y'' + y = cos^2(x)$ é

$$y(x) = c_1\, cos(x) + c_2\, sen(x) + \left(\frac{cos^3(x)}{3}\right) cos(x) + \left(\frac{cos^2(x)sen(x)}{9} + \frac{2}{9}sen(x)\right) sen(x).$$

(c) $y'' + 3y' + 2y = e^x$;

A equação está normalizada.

A equação característica associada é, $m^2 + 3m + 2 = 0$, cujas raízes são $m_1 = -1, m_2 = -2$.

Daí a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-2x}}_{y_2}$$

Temos que o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é

$$W = det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{pmatrix} = -e^{-3x}.$$

Pelo método de variação dos parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2;$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\, dx \qquad \text{e} \qquad c_2(x) = \int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\, dx;$$

onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada.*

Então,

$$c_1(x) = -\int \frac{e^x.e^{-2x}}{(1/2)}\, dx \quad \text{e} \quad c_2(x) = \int \frac{e^x.e^{-x}}{-e^{-3x}}\, dx.$$

Portanto

$$c_1(x) = \int e^{2x}\, dx = \frac{e^{2x}}{2}$$

e

$$c_2(x) = -\int e^{3x}\, dx. = -\frac{e^{3x}}{3}.$$

Consequentemente

$$y_p(x) = \frac{e^{2x}}{2}.y_1(x) - \frac{e^{3x}}{3}.y_2(x)$$

e uma solução geral de $y'' + 3y' + 2y = e^x$ é

$$y(x) = c_1\, e^{-x} + c_2\, e^{-2x} + \left(\frac{e^{2x}}{2}\right) e^{-x} - \left(\frac{e^{3x}}{3}\right) e^{-2x}.$$

(d) $2\, y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$;

Normalizando a equação: $y'' + y' + \frac{1}{2}y = 2\sqrt{x}$

A equação característica associada é, $m^2 + m + \dfrac{1}{2} = 0$, cujas raízes são $m_1 = \dfrac{-1 \pm i}{2}$.

Daí a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{e^{-x/2} cos(x/2)}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{-x/2} sen(x/2)}_{y_2}$$

Temos que o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é

$$W = det \begin{pmatrix} e^{-x/2} cos(x/2) & e^{-x/2} sen(x/2) \\ -(1/2)e^{-x/2}[cos(x/2) + sen(x/2)] & +(1/2)e^{-x/2}[cos(x/2) - sen(x/2)] \end{pmatrix} = (1/2)e^{-x}.$$

Pelo método de variação dos parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2;$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\, dx \qquad \text{e} \qquad c_2(x) = \int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\, dx;$$

onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada.*

Então,

$$c_1(x) = -\int \frac{2\sqrt{x}\, e^{-x/2} sen(x/2)}{(1/2)e^{-x}}\, dx \quad \text{e} \quad c_2(x) = \int \frac{2\sqrt{x}\, e^{-x/2} cos(x/2)}{(1/2)e^{-x}}\, dx.$$

Isto é,

$$c_1(x) = -\int 4\sqrt{x}\, e^{(x/2)} sen(x/2)\, dx$$

e

$$c_2(x) = \int 4\sqrt{x}\, e^{(x/2)} cos(x/2)\, dx.$$

Consequentemente uma solução geral de $2\,y'' + 2y' + y = 4\sqrt{x}$ é

$$y(x) = c_1\, e^{-x/2} cos(x/2) + c_2\, e^{-x/2} sen(x/2) -$$

$$-\left(\int 4\sqrt{x}\, e^{(x/2)} sen(x/2)\, dx\right) e^{-x/2} cos(x/2) + \left(\int 4\sqrt{x}\, e^{(x/2)} cos(x/2)\, dx\right) e^{-x/2} sen(x/2).$$

(e) $4\,y'' - y = xe^{x/2}$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$;

Normalizando a equação: $y'' - \dfrac{1}{4}y = \dfrac{xe^{x/2}}{4}$

A equação característica associada é, $m^2 - \dfrac{1}{4} = 0$, cujas raízes são $m_1 = \dfrac{1}{2}$ e $m_2 = -\dfrac{1}{2}$

Daí a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{e^{(x/2)}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{(-x/2)}}_{y_2}$$

Temos que o wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é

$$W = det \begin{pmatrix} e^{x/2} & e^{-x/2} \\ (1/2)e^{x/2} & -(1/2)e^{-x/2} \end{pmatrix} = -1.$$

Pelo método de variação dos parâmetros, buscamos uma solução particular da forma

$$y_p(x) = c_1(x)\, y_1 + c_2(x)\, y_2;$$

onde

$$c_1(x) = -\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\, dx \qquad \text{e} \qquad c_2(x) = \int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\, dx;$$

onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada*.

Assim,

$$c_1(x) = -\int \frac{xe^{x/2}.e^{(-x/2)}}{-4}\, dx \quad \text{e} \quad c_2(x) = \int \frac{xe^{x/2}.e^{x/2}}{-4}\, dx;$$

ou seja $c_1(x) = x^2/4 \quad$ e $\quad c_2(x) = -\displaystyle\int xe^x\, dx = (e^x - xe^x)/4.$

Daí,

$$y_p(x) = -[(x^2)/8]\, e^{(x/2)} + [(e^x - xe^x)/4]e^{(-x/2)};$$

e uma solução geral de $4\,y'' - y = xe^{x/2}$ é

$$y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{-x/2} - [(x^2)/8]\, e^{(x/2)} + [(e^x - xe^x)/4]e^{(-x/2)}.$$

Para concluir, precisamos determinar c_1 e c_2 tais que $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Tem-se

$$\begin{cases} y(x) = \left(c_1 - \dfrac{x^2}{8}\right) e^{x/2} + \left(c_2 + \dfrac{e^x - xe^x}{4}\right) e^{-x/2} \\ y'(x) = -\dfrac{1}{4}xe^{x/2} + \dfrac{1}{2}\left(c_1 - \dfrac{x^2}{8}\right) e^{x/2} + \left(\dfrac{-xe^x}{4} e^{-x/2}\right) e^{-x/2} - \dfrac{1}{2}\left(c_2 + \dfrac{e^x - xe^x}{4}\right) e^{-x/2} \end{cases}$$

Daí

$$\begin{cases} 1 = c_1 + (c_2 + 1/4) \\ 0 = c_1/2 - (c_2 + 1/4) \end{cases};$$

de onde calculamos $c_1 = 2/3$ e $c_2 = 1/(12)$.

Finalmente, a solução do PVI proposto é

$$y(x) = \left(\frac{2}{3} - \frac{x^2}{8}\right) e^{x/2} + \left(\frac{1}{12} + \frac{e^x - xe^x}{4}\right) e^{-x/2}.$$

(f) $2\,y'' + y' - y = x + 1$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Normalizando a equação: $y'' + \dfrac{1}{2}y' - \dfrac{1}{2}y = \dfrac{x+1}{2}$.

A equação característica associada é, $m^2 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$, cujas raízes são $m_1 = -1$ e $m_2 = \dfrac{1}{2}$

Daí a solução geral da equação homogênea associada é

$$y_h(x) = c_1 \underbrace{e^{-x}}_{y_1} + c_2 \underbrace{e^{(x/2)}}_{y_2}$$

O determinante wronskiano de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ é

$$W = det \begin{pmatrix} e^{-x} & e^{x/2} \\ & \\ -e^{-x} & (1/2)e^{x/2} \end{pmatrix} = (3/2)e^{-x/2}.$$

Procuramos agora uma solução particular da forma

$$y_p(x) = \left(-\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\,dx\right) y_1 + \left(\int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\,dx\right) y_2;$$

onde onde $h(x)$ é o termo independente *da equação normalizada*.

Temos

$$-\int \frac{h(x).y_2(x)}{W}\,dx = -\frac{1}{3}\int (x+1)e^{x}\,dx = -\frac{1}{3}xe^{x}.$$

e

$$\int \frac{h(x).y_1(x)}{W}\,dx = \frac{1}{3}\int (x+1)\,e^{-x/2}\,dx = -2\left(\frac{x}{3}+1\right)e^{-x/2}.$$

Daí

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{3}xe^{x}\right)e^{-x} + \left(-2\left(\frac{x}{3}+1\right)e^{-x/2}\right)e^{x/2};$$

e uma solução geral de $2\,y'' + y' - y = x + 1$ é

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{(x/2)} + \left(-\frac{1}{3}xe^{x}\right)e^{-x} - \left(\frac{2}{3}(x+3)e^{-x/2}\right)e^{x/2}. \\ &= c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{(x/2)} - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}(x+3) \\ &= c_1\,e^{-x} + c_2\,e^{(x/2)} - x - 2. \end{aligned}$$

Resta determinar c_1 e c_2 de modo a ter $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

Temos $y'(x) = -c_1e^{-x} + c_2e^{x/2} - 1$, de modo que

$$y(0) = 1, y'(0) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 - 2 = 1 \\ -c_1 + c_2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Então $c_1 = 1, c_2 = 2$ e a solução de $2\,y'' + y' - y = x + 1$,
$y(0) = 1, y'(0) = 0$ é a função

$$y(x) = e^{-x} + 2e^{(x/2)} - x - 2.$$

3. Calcule a solução geral ou resolva o PVI:

Observação: Em todos os itens vamos utilizar o mesmo procedimento: primeiro vamos calcular uma solução geral (pelo método matricial, i.é., de autovalores, autovetores e, se necessário, autovalores generalizados. Em seguida, se o problema pedir, vamos determinar os parâmetros que determinam a solução do PVI. Na maior parte dos exercícios, daremos apenas os resultados dos passos principais. É importante que você verifique os cálculos e faça todos os detalhes que achar necessários para uma boa compreensão da solução, e também - é claro-, verificando as divergências de resultados, etc..

Sendo,de modo geral, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a matriz do sistema,

lembre que a equação dos autovetores é

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} \end{pmatrix} = 0.$$

Também, para cada autovalor λ, o(s) autovetor(es), $\overrightarrow{V}$ associado(s) é (são) obtido(s) ao resolver a equação matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22-\lambda} \end{pmatrix} \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}.$$

(a) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y \end{cases}$,

Solução:

O sistema foi apresentado na forma explícita.

Passando para a forma matricial, temos [2]:

$$\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}.$$

[2]definindo $\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

A equação dos autovalores é

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0;$$

isto é,

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0,$$

cujas raízes são

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 4.$$

Resolvendo a equação dos autovetores para $\lambda = 1$, temos

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 2 \\ 1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 = 0 \\ v_1 + 2v_2 = 0 \end{cases}.$$

Concluímos então que os autovetores associados a λ_1 são da forma

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} -2v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Podemos escolher qualquer autovetor, desde que não seja o vetor nulo. Por exemplo

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daí formamos a primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \overrightarrow{V_1} e^{1.t}, \qquad \text{i.é.} \quad \overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Agora fazemos a mesma coisa com o segundo autovetor:

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 2 \\ 1 & 3-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja

$$\begin{cases} -2v_1 + 2v_2 = 0 \\ v_1 - v_2 = 0 \end{cases}.$$

Concluímos então que os autovetores associados a λ_2 são da forma

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \\ v_1 \end{pmatrix}$$

Podemos escolher qualquer autovetor, desde que não seja o vetor nulo. Por exemplo

$$\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daí formamos a segunda solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \overrightarrow{V_2}e^{4.t}, \qquad \text{i.é.} \quad \overrightarrow{X_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

E agora temos os elementos para escrever uma solução geral:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Na forma explícita, a solucão geral fica

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c_1e^t + c_2e^{4t} \\ \\ c_1e^t + c_2e^{4t} \end{pmatrix}.$$

ou

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1e^t + c_2e^{4t} \\ y(t) = c_1e^t + c_2e^{4t} \end{cases}.$$

(b) $\overrightarrow{Y}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ \\ 8 & -12 \end{pmatrix} \overrightarrow{Y},$

Solução:

O sistema já está na forma matricial. Temos:

Equação dos autovalores: $\lambda^2 + 2\lambda - 80 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = -10 \qquad \lambda_2 = 8$.

Autovetor associado a $\lambda_1 = -10$: $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{Y_1}(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10x}$$

Autovetor associado a $\lambda_2 = 8$: $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Segunda solução do sistema:

$$\overrightarrow{Y_2}(x) = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8x}$$

Solução geral:

$$\overrightarrow{Y}(x) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} e^{-10x} + c_2 \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{8x}.$$

(c) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (-5/2)x + 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = (3/4)x - 2y \end{cases}$,

Solução:

Colocando o sistema na forma matricial:

$$\overrightarrow{Z}' = \begin{pmatrix} -5/2 & 2 \\ 3/4 & -2 \end{pmatrix} \overrightarrow{Z} \quad \overrightarrow{Z}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Equação dos autovalores: $\lambda^2 + \dfrac{9}{2}\lambda + \dfrac{7}{2} = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = -\dfrac{7}{2} \qquad \lambda_2 = -1$.

Autovetor associado a $\lambda_1 = -\dfrac{7}{2}$: $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{Z_1}(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(7/2)t}$$

Autovetor associado a $\lambda_2 = -1$: $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$.

Segunda solução do sistema:

$$\overrightarrow{Z_2}(t) = \begin{pmatrix} 4/3 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Solução geral:

$$\overrightarrow{Z}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(7/2)t} + c_2 \begin{pmatrix} 4/3 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Na forma explícita, a solucão geral fica

$$\begin{cases} x(t) = -2c_1 e^{-(7/2)t} + (4/3)c_2 e^{-t} \\ y(t) = c_1 e^{-(7/2)t} + c_2 e^{-t} \end{cases}.$$

(d) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ \\ (-5/2) & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$,

Solução:

O sistema está na forma matricial.

Equação dos autovalores: $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = -3 \qquad \lambda_2 = 1$.

Autovetor associado a $\lambda_1 = -3$: $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

Autovetor associado a $\lambda_2 = 1$: $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

Segunda solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 5/2 \end{pmatrix} e^{t}$$

Solução geral:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 5/2 \end{pmatrix} e^{t}.$$

(e) $\begin{cases} \overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}, \\ \overrightarrow{X}(0) = (3,5) \end{cases}$

O sistema está na forma matricial.

Equação dos autovalores: $\lambda^2 - 1/4 = 0$.

Autovalores $\lambda_1 = -1/2 \qquad \lambda_2 = 1/2$.

Autovetor associado a $\lambda_1 = -1/2$: $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-1/2)t}$$

Autovetor associado a $\lambda_2 = 1/2$: $\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix}$.

Segunda solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} e^{(1/2)t}$$

Solução geral:

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(1/2)t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} e^{(1/2)t}.$$

Ou ainda

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_2 e^{(1/2)t} \\ \\ c_1 e^{-(1/2)t} \end{pmatrix}.$$

Utilizando os dados iniciais, devemos ter

$$\begin{pmatrix} c_2 e^{(1/2).0} \\ \\ c_1 e^{-(1/2).0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Assim $c_1 = 5$ e $c_2 = 3$. Portanto a solução do PVI é

$$\overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} 5\, e^{(1/2)t} \\ \\ 3\, e^{-(1/2)t} \end{pmatrix}.$$

(f) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = 9x - 3y \end{cases}$,

Escrevendo o sistema na forma matricial:

$$\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} \quad \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Equação dos autovalores: $\lambda^2 = 0$.

Os dois autovalores são iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda) = 0$ [3].

[3] Autovalores podem valer zero. Autovetores não podem ser iguais a $\overrightarrow{0}$

Autovetor associado a $\lambda = 0$: $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{0.t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

ATENÇÃO !!!! : Como vimos na Aula Dezoito, neste caso uma segunda solucão é dada pela expressão

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t.\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{W_1}\right] e^{0.t}; \tag{1}$$

onde o vetor $\overrightarrow{W_1}$ é uma solução do sistema

$$(A - \lambda Id)\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1}.$$

No caso, para calcular $\overrightarrow{W_1}$, precisamos resolver

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9 & -3-\lambda \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=0} \overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1};$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3w_1 - w_2 = 1 \\ 9w_1 - 3w_2 = 3 \end{cases},$$

e podemos escolher, por exemplo (fazendo $w_1 = 0$)

$$\overrightarrow{W} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (1), obtemos a segunda solução

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t.\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{W_1}\right] =$$

Portanto uma solução geral é

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right].$$

(g) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -6x + 5y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x + 4y \end{cases}$,

Escrevendo o sistema na forma matricial:

$$\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} \quad \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Equação dos autovalores: $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 = 0$.

Os dois autovalores são iguais: $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda) = -1$.

Novamente só temos um autovetor (a menos de múltiplos) associado a $\lambda = 1$,

a saber $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{1.t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Uma segunda solucão é dada pela expressão

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t.\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{W_1} \right] e^{-t}; \tag{2}$$

onde o vetor $\overrightarrow{W_1}$ é uma solução do sistema

$$(A - \lambda Id)\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1}.$$

Neste exemplo, precisamos resolver

$$\begin{pmatrix} -6-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{pmatrix} \Big|_{\lambda=-1} \overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1};$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} -5w_1 + 5w_2 = 1 \\ -5w_1 + 5w_2 = 1 \end{cases} ,$$

e podemos escolher, por exemplo (fazendo $w_1 = 0$)

$$\overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (2), obtemos a segunda solução

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} \right] e^{-t}$$

Portanto uma solução geral é

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \end{pmatrix} \right] e^t.$$

(h) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 4y \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + 6y \end{cases}$

$x(0) = -1,\; y(0) = 6,$

Solução:

Repetimos o raciocínio:

Escrevendo o sistema na forma matricial:

$$\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \overrightarrow{X} \qquad \overrightarrow{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Equação dos autovalores: $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0 = 0$.

Temos $\lambda_1 = \lambda_2 (= \lambda) = 4$.

Um autovetor associado a $\lambda = 4$ é $\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Primeira solução do sistema:

$$\overrightarrow{X_1}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}.$$

Uma segunda solução é dada pela expressão

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t.\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{W_1}\right]\, e^{-t}; \tag{3}$$

onde o vetor $\overrightarrow{W_1}$ é uma solução do sistema

$$(A - \lambda Id)\overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1}.$$

Aqui, precisamos resolver

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 6-\lambda \end{pmatrix}\Bigg|_{\lambda=4} \overrightarrow{W_1} = \overrightarrow{V_1};$$

ou seja

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos o sistema

$$\begin{cases} -2w_1 + 4w_2 = 2 \\ -w_1 + 2w_2 = 1 \end{cases},$$

e podemos escolher, por exemplo (fazendo $w_1 = 0$)

$$\overrightarrow{W_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (3), obtemos a segunda solução

$$\overrightarrow{X_2}(t) = \left[t.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right] e^{4t}$$

Portanto uma solução geral é

$$\overrightarrow{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \left[t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right] e^{4t}.$$

Para finalizar, devemos calcular c_1 e c_2 tais que

$$c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4.0} + c_2 \left[0.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right] e^{4.0} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{cases} 2c_1 = -1 \\ c_1 + (1/2)c_2 = 6 \end{cases}$$

Daí $c_1 = -1/2$, $c_2 = 13/2$ e a solução do PVI é

$$\overrightarrow{X}(t) = (-1/2)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + (13/2)\left[t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right] e^{4t}.$$

(i) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$,

(j) $\overrightarrow{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \overrightarrow{X}$.